



Il linguaggio matematico e lo studio della Matematica

Giancarlo Travaglini (Università di Milano-Bicocca) - 23 giugno 2025

Oggi

- ① Parleremo brevemente di orientamento, proponendo alcuni strumenti per un successivo lavoro personale.
- ② Presenteremo alcuni esercizi utili per familiarizzarci con Il linguaggio matematico e con le difficoltà proprie dello studio di un libro di Matematica.

ORIENTAMENTO

Se molti studenti incontrano difficoltà nello studio della matematica, questo si deve anche al particolare metodo di studio che la matematica richiede di sviluppare.

Bisogna comprendere la necessità di un linguaggio preciso e saperlo utilizzare quando necessario, familiarizzarsi con gli strumenti logici ed il simbolismo matematico.

È necessario capire le giustificazioni dei risultati (esercizi, teoremi, tecniche di calcolo) verificandone i passaggi, esemplificandole e riutilizzandole in situazioni analoghe.

In sintesi: *fare propria una certa forma mentale che privilegi sistematicamente il ragionamento rispetto alla memorizzazione e all'applicazione di schemi meccanici.*

Il linguaggio non è un problema di simboli.

Al linguaggio matematico non si chiede di essere formale, si chiede di essere chiaro, non ambiguo.

A volte una buona descrizione “a parole” è più apprezzata di una scrittura in simboli, anche se spesso è vero l'opposto.

Gli studenti dovrebbero uscire dalla Scuola Superiore con la necessaria precisione di linguaggio, la sicurezza nell'uso di implicazioni, contresempi, dimostrazioni per assurdo, la conoscenza dei simboli utilizzati nello studio e nelle operazioni all'interno di insiemi generici ed in particolare di insiemi numerici.

Discuteremo anche le difficoltà proprie dello studio di un libro di Matematica.

Ogni studente sa che studiare un libro di matematica è difficile, ed è inutile leggerlo distrattamente.

Non è però solo un problema di attenzione o impegno intellettuale; questi li richiedono anche testi di Medicina o Diritto.

Esiste una “differenza” nei testi di matematica, che per la maggioranza degli studenti non costituisce una difficoltà, ma per altri può essere un ostacolo serio.

Per rispondere a queste difficoltà proponiamo una dispensa che condensa in sè

- ① Un **Syllabus**, cioè un elenco (implicito) dei contenuti di Matematica della Scuola Superiore necessari per iniziare un corso di studi come Matematica (ma anche Fisica, Statistica, Ingegneria, ...).
- ② Un **Test** per valutare la propria padronanza dei prerequisiti e la propria capacità di studiare argomenti matematici.
- ③ **Alcune indicazioni bibliografiche** utili per un lavoro personale volto a sanare le lacune o debolezze eventualmente evidenziate dall'esito del test.

Questo materiale si intitola:

AUTOVALUTAZIONE E PREPARAZIONE AL CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

ed è disponibile alla pagina

[https://www.matapp.unimib.it/it/didattica/
corso-laurea-triennale/studiare-matematica](https://www.matapp.unimib.it/it/didattica/corso-laurea-triennale/studiare-matematica)

Nella prossima slide trovate il QR code di questa pagina:



Leggiamo qualche pagina di questo file PDF

Può essere utile chiudere questo breve discorso sull'orientamento parlando dei lavori che i matematici possono considerare dopo la laurea.

Su questo, forse, il migliore riferimento è il libro

(a cura di) **E. Del Prete, A. Russo, G. Anzellotti**

Matematici al lavoro. Cinquanta e più storie di laureati in matematica.
Sironi Editore

In questo libro circa 50 laureati in Matematica descrivono in modo abbastanza preciso i lavori che svolgono.

L'indice, nella slide seguente può dare un'idea della varietà delle attività di questi laureati.

Leggeremo poi qualche passaggio di uno di questi "racconti".

a cura di Enza Del Prete,
Alessandro Russo, Gabriele Anzellotti

Matematici al lavoro

Cinquanta e più storie
di laureati in matematica

SIRONI
EDITORE

INDICE

Saluti istituzionali	7
Introduzione	11
METEOROLOGIA E AMBIENTE	15
FINANZA E RISCHI	31
COMUNICAZIONE SCIENTIFICA ED EDITORIA	63
LOGISTICA E TRASPORTI	89
MEDICINA E BIOMEDICINA	105
RICERCA E SVILUPPO	117
SCUOLA	147
TECNOLOGIE DELL'INFORMAZIONE E DELLA COMUNICAZIONE	157
UNIVERSITÀ E RICERCA	183
ALTRI SETTORI	201
APPROFONDIMENTI	211
Che lavoro fanno i matematici?	
Una lettura del rapporto tra matematici e mercato del lavoro	213
I laureati in Matematica: profilo e tendenze della condizione occupazionale	233
Consigli di lettura	247

Confesso innanzi tutto di aver scelto e vissuto gli studi universitari di Matematica per pura passione, senza curarmi troppo del mondo del lavoro fino all'ultimo esame e alla laurea, con indirizzo generale, conseguita nell'aprile del 1998. A quel punto ho sentito che per me era venuto il momento di abbandonare il mondo universitario, e cercare di scoprire come utilizzare in pratica tutto ciò che avevo imparato.

Ho avuto quasi subito l'opportunità di avvicinarmi, tramite una borsa di studio di qualche mese, al dipartimento di ricerca di una grossa azienda genovese: anche se l'esperienza non ha aperto sbocchi successivi all'interno della ditta, è stata molto utile per darmi un primo "assaggio" del mondo del lavoro e avvicinarmi alla programmazione informatica e alla matematica applicata. Non sono mai stata particolarmente attratta dal mondo dei computer, ma nel corso degli anni ho imparato a utilizzare e apprezzare l'informatica come strumento prezioso per tradurre in pratica e rendere più facilmente fruibili le buone idee.

Curriculum, colloqui e al termine della borsa di studi sono entrata nell'azienda in cui lavoro ancora oggi. In competizione con la mia candidatura c'erano sicuramente figure di altro tipo, provenienti da diverse facoltà universitarie; per mia fortuna il progetto sul quale dovevo lavorare (un progetto di ricerca europeo sull'ottimizzazione del traffico ferroviario) dava la possibilità di dedicare un paio di mesi alla formazione del nuovo assunto, prima di entrare nel cuore del lavoro. Penso che questo fatto abbia permesso di scegliere una figura come la mia, con deboli basi informatiche ma una solida formazione mentale e una buona propensione all'apprendimento. Le prime settimane sono state quasi interamente dedicate allo studio, inizialmente indirizzato dal mio datore di lavoro, che mi ha fornito sussidi e un po' di supporto, in seguito anche solitario. Ho imparato le basi della

sia di lingua che di programmazione, sono venuti solo alcuni anni più tardi, quando le dimensioni e la solidità dell'azienda lo hanno permesso...

L'azienda di cui parlo è una piccola società di consulenza informatica orientata al mondo della simulazione; si tratta di un'attività in crescita, un lavoro che trovo vario e ricco di stimoli. I progetti di cui ci occupiamo sono i più vari: dal traffico ferroviario alla grande industria, dai processi produttivi alla logistica, dal progetto di ricerca europeo all'applicazione su misura creata in stretto rapporto con il cliente. Il tutto è inquadrato in una realtà di dimensioni contenute, in cui si ha l'occasione di seguire da vicino ogni fase del progetto; le idee e la creatività sono importanti e le responsabilità così come le soddisfazioni si vivono in prima persona.

Tra i vari progetti che ho seguito quello che mi ha dato più opportunità di crescita, e che si è trasformato nel giro di qualche anno nel prodotto di punta dell'azienda, è un software per la programmazione della produzione in una grande industria. Poco dopo il mio arrivo in azienda mi è stato chiesto di occuparmi di un progetto pilota, sovvenzionato in questo caso dalla Regione, che doveva consistere nella realizzazione di un prototipo per supportare la programmazione delle linee di produzione in una vetreria. Ovviamente si trattava di un mondo completamente nuovo per me, ma nel giro di qualche mese, lavorando a stretto contatto con le persone che gestivano manualmente la programmazione, sono diventata esperta di vincoli produttivi, gestione dei magazzini, stagionalità dei prodotti e tipologie di soddisfacimento delle previsioni. Una volta compreso il problema ci siamo messi all'opera per costruire, praticamente da zero, uno strumento appropriato che fornisse non tanto la soluzione ottima (la cui esistenza non è neanche garantita, vista la complessità del problema), quanto dei buoni e affidabili suggerimenti che vengono poi affinati direttamente dall'utente.

a far parte di una multinazionale e il nostro prodotto è stato proposto e acquistato in tutta Europa (Germania, Francia, Spagna); recentemente è partito un grosso progetto di personalizzazione del software anche per gli Stati Uniti.

Seguire la partenza del progetto nelle varie nazioni è stata per me una grande opportunità di crescita, che ha significato organizzare e partecipare a numerose riunioni – prima di presentazione, poi di discussione e definizione delle specifiche e delle personalizzazioni per i clienti esteri – preparare e tenere corsi di training sul prodotto, specializzarsi nel supporto, quindi nella comprensione e rapida risoluzione di ogni tipo di problema in risposta a chiamate telefoniche e/o e-mail.

Questa avventura è ancora in corso, chissà dove ci porterà... Il bilancio che posso fare finora è molto positivo. Per svolgere il mio lavoro naturalmente ho dovuto imparare tanto rispetto alle conoscenze che avevo da neolaureata, ma i miei studi universitari sono stati una solida base su cui e con cui continuare a costruire; ho sperimentato fortemente e di persona che la formazione e la metodologia di studio apprese negli anni universitari valgono molto più del contenuto dei singoli corsi di studio.

Ora iniziamo a parlare del linguaggio matematico e dello studio di un libro di Matematica.

Partiamo da alcune ambiguità del linguaggio comune.

Non vogliamo però criticare il linguaggio comune, che è soddisfacente per la nostra vita quotidiana.

Vogliamo mostrare che un uso superficiale del linguaggio comune può non essere sufficiente per farsi comprendere in Matematica (o in Statistica, o in Fisica, ...).

Un

È naturale che in Matematica esistano delle convenzioni di linguaggio. Consideriamo l'affermazione

“Un computer ha un problema”,

In Matematica “esiste un computer” significa “esiste almeno un computer”, cioè uno o più di uno.

Se intendiamo dire “esattamente uno”, dobbiamo precisarlo.

Analogamente, “esistono due” significa “esistono almeno due”, etc.

Possiamo *quantificare* i computer di cui si parla se, ad esempio, scegliamo tra le espressioni

- “Esiste uno e un solo computer tale che ...”
- “Esiste un computer tale che ...”
- “Per ogni computer si ha che ...”

Possiamo quantificare l'espressione "*un problema*" se, ad esempio, scegliamo tra

- "...ha esattamente un problema"
- "...ha un problema" (cioè "almeno un problema")
- "...ha al più un problema"

Vediamo altri esempi nei quali alcune espressioni del linguaggio comune (non importa se riferite o meno alla matematica) si prestano a più di una interpretazione.

Esempio

Consideriamo le frasi:

(a) "Un multiplo di 3 è un multiplo di 6".

(b) "Una tartaruga nata prima del 1950 è ancora viva".

Cosa vuol dire la (a)? "Ogni multiplo di 3 è un multiplo di 6" (falso: 9 è un multiplo di 3, ma non di 6) oppure "Esiste un multiplo di 3 che è un multiplo di 6" (vero: ad esempio 6 stesso)? Probabilmente la frase sarebbe interpretata nel primo modo, intendendo "Un multiplo di 3" come "Un generico multiplo di 3", cioè "Ogni multiplo di 3", dunque sarebbe falsa.

La (b), invece, viene più facilmente interpretata nel secondo modo: "Esiste una tartaruga nata prima del 1950 che è ancora viva" (vero), mentre interpretata nell'altro modo risulterebbe falsa.

Esercizio. *Spiegare il senso preciso delle seguenti frasi. Successivamente, dire di ciascuna di esse se è vera o falsa.*

(a) “Se $q \neq 0$, esiste al più una soluzione dell'equazione $px + q = 0$ ”.

(b) “Se $q = 0$, esiste una soluzione dell'equazione $px + q = 0$ ”.

Soluzione.

La (a) vuol dire che esiste una soluzione oppure nessuna, ma non più di una. Si dice che è un *teorema di unicità*. Osserviamo che la (a) è vera: se $q \neq 0$ e $p \neq 0$ la soluzione x esiste ed è unica: $x = -q/p$; mentre se $q \neq 0$ e $p = 0$ non esiste alcuna soluzione.

La (b) invece afferma l'esistenza (ma non necessariamente l'unicità) della soluzione (cioè l'esistenza di almeno una soluzione). Si parla in questo caso di un *teorema di esistenza*. Osserviamo che la (b) è vera: se $q = 0$ e $p \neq 0$ la soluzione esiste ed è unica ($x = 0$), se $q = 0$ e $p = 0$ ogni x è soluzione, e dunque le soluzioni sono infinite.

“O”

Nella lingua italiana la disgiunzione “o” ha un’ambiguità ben nota: può essere inclusiva oppure esclusiva.

Esempio Consideriamo le seguenti affermazioni:

- (a) “Se n è un intero compreso tra $\sqrt{2}$ e $\sqrt{10}$, allora $n = 2$ o $n = 3$ ”.
- (b) “Se p, q sono numeri interi positivi e 3 divide il prodotto pq , allora 3 divide p o 3 divide q ”.

Nella (a) la “o” lega le due condizioni “ $n = 2$ ”, “ $n = 3$ ”. Si afferma che o l’una o l’altra cosa è vera. Ovviamente non possono essere vere entrambe e quindi qui intendiamo la “o” in senso *esclusivo* (l’*aut* latino): delle due alternative, vale una e una sola. La (a) è corretta, poiché 2 e 3 sono tutti e soli i numeri interi compresi tra $\sqrt{2}$ e $\sqrt{10}$.

Anche la (b) è una affermazione corretta, purché si interpreti adeguatamente la “o”. Infatti in questo caso l’interpretazione esclusiva della “o” darebbe un’affermazione falsa. Basta considerare il caso banale in cui $p = q = 3$, per il quale 3 divide pq , ma divide sia p sia q . L’uso che qui si fa della “o” è quello *non esclusivo* (corrispondente al *vel* latino).

Tutti, solo

Di solito nel linguaggio comune la parola “tutti” non nasconde ambiguità. Consideriamo però le tre frasi seguenti.

- (a) “i numeri dispari sono tutte le soluzioni dell'equazione $\cos(\pi x) = -1$ ”
- (b) “i numeri primi maggiori di 2 sono tutti dispari”
- (c) “i gatti sono tutti i miei amici”.

In (a) intendiamo che i numeri dispari sono *esattamente* le soluzioni dell'equazione, cioè non ne mancano e non ne avanzano. Invece in (b) non intendiamo che i numeri primi maggiori di 2 sono esattamente i numeri dispari, ma che ogni numero primo maggiore di 2 è dispari, senza escludere la possibilità che esistano numeri dispari (come ad esempio 9) che non sono primi, ma sono maggiori di 2. La differenza tra la (a) e la (b) è data dall'articolo: “tutte le soluzioni”. Osserviamo però che la (c) ha la stessa struttura della (a), ma, a buon senso, un significato diverso: “i gatti sono i miei soli amici”, cioè solo tra i gatti trovo i miei amici (senza intendere che tutti i gatti sono miei amici).

Notiamo che mentre la (b) e la (c) consistono di una sola affermazione, la (a) dice due cose: “i numeri dispari sono tutte le soluzioni dell'equazione $\cos(\pi x) = -1$ ” e “tutte le soluzioni dell'equazione $\cos(\pi x) = -1$ sono numeri dispari”.

In Matematica la (a) viene riscritta in una forma che distingue meglio le due affermazioni: “i numeri dispari sono *tutte e sole* le soluzioni dell'equazione $\cos(\pi x) = -1$ ”, che racchiude le due affermazioni: “*tutti* i numeri dispari sono soluzioni dell'equazione $\cos(\pi x) = -1$ ” e “*solo* i numeri dispari sono soluzioni dell'equazione $\cos(\pi x) = -1$ ”, cioè non ci sono soluzioni che non siano numeri dispari.

Utilizzando il linguaggio insiemistico, se indichiamo con D l'insieme dei numeri dispari e con S l'insieme delle soluzioni dell'equazione $\cos(\pi x) = -1$, la frase “tutti i numeri dispari sono soluzioni dell'equazione $\cos(\pi x) = -1$ ” significa $D \subseteq S$, mentre la frase “solo i numeri dispari sono soluzioni dell'equazione $\cos(\pi x) = -1$ ” significa $S \subseteq D$. Dunque l'affermazione “i numeri dispari sono *tutte e sole* le soluzioni dell'equazione $\cos(\pi x) = -1$ ” significa $S = D$.

In breve: un'affermazione come “tutti i gatti sono mammiferi” dice che ogni gatto è mammifero, cioè che l'insieme G dei gatti è contenuto nell'insieme M dei mammiferi: $G \subseteq M$ (ma non dice nulla sul fatto che tutti i mammiferi siano gatti); invece l'affermazione “solo i forti resistono” (più chiara se la riscriviamo nella forma “solo tra i forti troviamo quelli che resistono”) significa che l'insieme R di quelli che resistono è contenuto nell'insieme F di coloro che sono forti: $R \subseteq F$ (ma questo non implica $R = F$).

“tutti gli elementi di A sono elementi di B ” significa $A \subseteq B$;

“solo gli elementi di A sono elementi di B ” significa $A \supseteq B$;

“tutti e solo gli elementi di A sono elementi di B ” significa $A = B$.

Esercizio. Rappresentare le seguenti scritture simboliche usando sia “e”, “o”, sia scritture insiemistiche.

- (a) $1 < x < 3$;
- (b) $x \leq 0$;
- (c) $x = \pm 3$;
- (d) $x \neq \pm 3$;
- (e) $|x| > 1$;
- (f) $x(x - 1) > 0$.

Soluzione.

- (a) $x > 1$ e $x < 3$. Se $A = \{x : x > 1\}$ e $B = \{x : x < 3\}$, allora
(a) : $x \in A \cap B$.
- (b) $x < 0$ o $x = 0$. Se $C = \{x : x < 0\}$ e $D = \{0\}$, allora (b) : $x \in C \cup D$.
- (c) $x = 3$ o $x = -3$. Se $E = \{3\}$ e $F = \{-3\}$, allora (c) : $x \in E \cup F$.
- (d) $x \neq 3$ e $x \neq -3$. Se $G = \{x : x \neq 3\}$ e $H = \{x : x \neq -3\}$, allora
(d) : $x \in G \cap H$.
- (e) $x > 1$ o $x < -1$. Se $I = \{x : x > 1\}$ e $L = \{x : x < -1\}$, allora
(e) : $x \in I \cup L$.
- (f) $(x > 0 \text{ e } x - 1 > 0)$ o $(x < 0 \text{ e } x - 1 < 0)$. Se $M = \{x : x > 0\}$,
 $N = \{x : x > 1\}$, $P = \{x : x < 0\}$ e $Q = \{x : x < 1\}$, allora
(f) : $x \in (M \cap N) \cup (P \cap Q) = N \cup P$.

Proposizioni e Proprietà

Chiamiamo *proposizione* una frase (sensata) per la quale è ragionevole domandarsi se è vera o falsa. Ad esempio

“I gatti sono anfibi” è una proposizione falsa.

“4, 5, 6 sono le uniche soluzioni intere della disequazione $\pi \leq x \leq 2\pi$ ” è una proposizione vera.

“Se n è un multiplo di 9, allora $3n$ è un multiplo di 27 ” è una proposizione vera.

Chiamiamo *proprietà* una frase (sensata) che contiene almeno una variabile, cioè un nome o un simbolo che indica diversi oggetti, al variare del quale la proprietà può diventare vera o falsa. Ad esempio

“Il triangolo T è rettangolo” è vera per certi T , non per altri.

“ $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ ” è vera per $1 \leq x \leq 2$.

“ p è un numero primo ” è vera per 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

Riprendiamo uno di questi ultimi esempi.

" $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ " è vera per $1 \leq x \leq 2$.

Si tratta di una uguaglianza tra insiemi:

$$\{x : x^2 - 3x + 2 \leq 0\} = \{x : 1 \leq x \leq 2\}$$

I passaggi con cui risolviamo (cioè troviamo tutte e sole le soluzioni di) una equazione o una disequazione, sono uguaglianze tra insiemi, cioè modi diversi di scrivere lo stesso insieme, partendo dal più complicato, l'equazione o la disequazione da risolvere, fino ad arrivare al più semplice, la soluzione. Ad esempio, la soluzione di questa equazione di primo grado:

$$x - 7 = 3x + 8$$

$$x - 3x = 8 + 7$$

$$-2x = 15$$

$$x = -15/2$$

significa questa uguaglianza tra insiemi:

$$\{x : x - 7 = 3x + 8\} = \{x : x - 3x = 8 + 7\} = \{x : -2x = 15\} = \left\{x : x = -\frac{15}{2}\right\}$$

Implicazioni e contresempi

Indichiamo con $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ l'insieme dei numeri interi positivi. Consideriamo il seguente

Teorema. Sia $n \in \mathbb{N}$ dispari, allora n^2 è dispari.

In simboli il teorema dice che

$$(n \text{ dispari} \implies n^2 \text{ dispari}) .$$

Il simbolo $\implies$ indica qui l'implicazione tra due proprietà.

Cioè la verità di “ n dispari ” implica la verità di “ n^2 dispari ”.

Per dimostrare il teorema non possiamo passare in rassegna tutti i casi (i numeri interi positivi dispari sono infiniti). Dobbiamo invece considerare il generico $n \in \mathbb{N}$ dispari.

Questo è un passaggio chiave nel ragionamento matematico. Nel suo libro *Introduzione alla Matematica* (1961), Sansoni, Alfred N. Whitehead scriveva

La matematica come scienza cominciò quando qualcuno, probabilmente un greco, per la prima volta dimostrò proposizioni su qualsiasi oggetto o su qualche oggetto, senza specificazione di cose particolari ben definite.

Possiamo dimostrare il teorema nel seguente modo. Ogni intero positivo dispari n può essere scritto nella forma $n = 2k + 1$ (dove $k \geq 0$ è intero). Allora

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

e quindi n^2 è un numero dispari.

Notiamo che è equivalente dire che

n è un intero positivo dispari

e che

n può essere scritto nella forma $n = 2k + 1$, con $k \geq 0$ intero,

ma la seconda formulazione è più esplicita e ci permette di iniziare la dimostrazione.

Consideriamo ora la seguente

Proposizione. Se n è un multiplo di 9, allora è un quadrato perfetto.

Questa proposizione è falsa. Infatti 18 è un multiplo di 9, ma non è un quadrato perfetto. Questo dimostra la falsità dell'implicazione

$$(n \text{ multiplo di } 9 \implies n \text{ quadrato perfetto}) .$$

Per dimostrare la falsità dell'implicazione non abbiamo svolto una dimostrazione. Abbiamo trovato un controesempio, cioè un numero che è multiplo di 9, ma non è un quadrato perfetto.

Ne basta uno. Ad esempio, 36 è multiplo di 9, ed è un quadrato perfetto, ma non è vero che ogni multiplo di 9 è un quadrato perfetto.

Esercizio. Sia $n \in \mathbb{N}$. Le tre proprietà seguenti

$$(a) \quad n \text{ è primo}, \quad (b) \quad n \text{ è dispari}, \quad (c) \quad n < 20$$

non si implicano a vicenda in alcun modo, cioè

$$a \not\Rightarrow b, \quad a \not\Rightarrow c, \quad b \not\Rightarrow a, \quad b \not\Rightarrow c, \quad c \not\Rightarrow a, \quad c \not\Rightarrow b.$$

Per provare la falsità di ciascuna implicazione sono proposti alcuni contresempi, che possono essere o non essere corretti. Individuare quelli corretti.

$a \not\Rightarrow b$; contresempi proposti: $n = 2$; $n = 3$; $n = 4$;

$a \not\Rightarrow c$; contresempi proposti: $n = 3$; $n = 30$; $n = 23$;

$b \not\Rightarrow a$; contresempi proposti: $n = 7$; $n = 9$; $n = 21$;

$b \not\Rightarrow c$; contresempi proposti: $n = 21$; $n = 15$; $n = 24$;

$c \not\Rightarrow a$; contresempi proposti: $n = 17$; $n = 18$; $n = 2$;

$c \not\Rightarrow b$; contresempi proposti: $n = 8$; $n = 22$; $n = 17$.

Soluzione.

$a \not\Rightarrow b$; contresempi proposti: $n = 2$ (Sì); $n = 3$ (No); $n = 4$ (No);

$a \not\Rightarrow c$; contresempi proposti: $n = 3$ (No); $n = 30$ (No); $n = 23$ (Sì);

$b \not\Rightarrow a$; contresempi proposti: $n = 7$ (No); $n = 9$ (Sì); $n = 21$ (Sì);

$b \not\Rightarrow c$; contresempi proposti: $n = 21$ (Sì); $n = 15$ (No); $n = 24$ (No);

$c \not\Rightarrow a$; contresempi proposti: $n = 17$ (No); $n = 18$ (Sì); $n = 2$ (No);

$c \not\Rightarrow b$; contresempi proposti: $n = 8$ (Sì); $n = 22$ (No); $n = 17$ (No).

Esercizio. Supponiamo che in una certa famiglia ci siano due fratelli e due sorelle, di altezze tutte diverse tra loro. Consideriamo le seguenti affermazioni.

- (a) Il più alto fratello è più alto della più alta sorella.
- (b) Ogni fratello è più alto di ogni sorella.
- (c) Ogni sorella è più bassa di qualche fratello.
- (d) La media delle altezze dei fratelli è maggiore della media delle altezze delle sorelle.

Stabilire le implicazioni esistenti tra le precedenti affermazioni. Cioè rispondere alle seguenti domande:

$$\begin{array}{cccccc} a \underset{?}{\implies} b, & a \underset{?}{\implies} c, & a \underset{?}{\implies} d, & b \underset{?}{\implies} a, & b \underset{?}{\implies} c, & b \underset{?}{\implies} d, \\ c \underset{?}{\implies} a, & c \underset{?}{\implies} b, & c \underset{?}{\implies} d, & d \underset{?}{\implies} a, & d \underset{?}{\implies} b, & d \underset{?}{\implies} c \end{array}$$

Soluzione

$a \not\Rightarrow b$ poiché, se indichiamo con $1F$ l'altezza in centimetri del primo fratello, e analogamente, $2F, 1S, 2S$, possiamo considerare il contreesempio $1F = 180, 2F = 170, 1S = 178, 2S = 176$, che soddisfa (a) ma non (b).

Dunque la verità di (a) non implica la verità di (b) (scriviamo $a \not\Rightarrow b$).

$a \Rightarrow c$ poiché se (a) è soddisfatta, allora tutte le sorelle sono più basse del più alto fratello e quindi (c) è soddisfatta.

$a \nRightarrow d$ va bene il contresempio usato per dimostrare che $a \nRightarrow b$.

$b \Rightarrow a$ poiché se ogni fratello è più alto di ogni sorella, in particolare il più alto fratello è più alto della più alta sorella.

$b \Rightarrow c$ poiché abbiamo appena dimostrato che $b \Rightarrow a$ e che $a \Rightarrow c$.

$b \Rightarrow d$ poiché la media delle altezze dei fratelli è maggiore dell'altezza del più basso fratello che, per (b) è maggiore dell'altezza della più alta sorella, che a sua volta è maggiore della media delle altezze delle sorelle.

$c \Rightarrow a$ poiché se (c) è soddisfatta, allora la più alta sorella è più bassa di qualche fratello, quindi del più alto fratello (dunque (a) e (c) sono equivalenti; scriviamo $a \Leftrightarrow c$).

$c \nRightarrow b$ altrimenti avremmo $a \Rightarrow c \Rightarrow b$ (falso).

$c \nRightarrow d$ come sopra.

$d \nRightarrow a$ consideriamo il controesempio $1F = 180$, $2F = 176$, $1S = 182$, $2S = 168$, che soddisfa (d) ma non (a) .

$d \nRightarrow b$ altrimenti avremmo $d \Rightarrow b \Rightarrow a$ (falso).

$d \nRightarrow c$ come sopra.

Dimostrazioni per assurdo

Al termine del precedente esercizio abbiamo dimostrato $d \nRightarrow b$ “ragionando per assurdo”.

Abbiamo cioè supposto $d \Rightarrow b$ e abbiamo dedotto (ricordando che $b \Rightarrow a$) l'implicazione $d \Rightarrow a$, che sappiamo essere falsa. Da questo abbiamo concluso che la tesi $d \nRightarrow b$ è vera.

Il procedimento di dimostrazione per assurdo consiste nel dimostrare una tesi assumendola falsa e deducendo da questo una contraddizione.

Vedremo altri esempi, ma prima dobbiamo capire cosa significa “assumere falsa”, cioè “negare” una affermazione.

La negazione di una proposizione (o di una proprietà) è un'altra proposizione (o proprietà), la indichiamo con " $\sim A$ ", che è vera quando è falsa A ed è falsa quando è vera A . Se A è rappresentata da un insieme (che indichiamo ancora con la lettera A), allora $\sim A$ è rappresentata dall'insieme complementare A^c . Ad esempio, parlando dell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, la negazione della proprietà

" n è multiplo di 3 "

è

" n ha la forma $n = 3h + 1$, oppure la forma $3k + 2$ ".

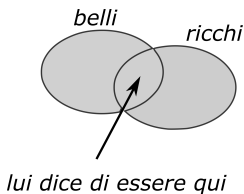
Cioè se $A = \{n \in \mathbb{Z} : n = 3\ell\}$, allora $\sim A$ è rappresentata dall'insieme complementare

$$A^c = \{n \in \mathbb{Z} : \exists h \in \mathbb{Z} : n = 3h + 1\} \cup \{n \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} : n = 3k + 2\} .$$

Per negare questa proposizione sarebbe sufficiente (e corretto) porre un "non è vero che" davanti. Ad esempio, possiamo negare " n è multiplo di 3" scrivendo semplicemente "non è vero che n è multiplo di 3". Il problema è che, ragionando per assurdo, dobbiamo trarre delle conseguenze dalla negazione della tesi, e questo è più facile se la negazione è scritta in modo esplicito, come nel caso

" n ha la forma $n = 3h + 1$, oppure la forma $3k + 2$ ".

Esempio. Lui dice a lei: “Sono bello e ricco”. Lei risponde: “Non è vero”. Cosa significa?



Significa che lui è bello e povero, o brutto e ricco, o brutto e povero.

Esercizio. Negare le seguenti proposizioni.

(a) Ogni topo ha paura di qualche gatto.

Negazione. Esiste un topo che non ha paura di alcun gatto.

(b) Ogni topo ha paura di tutti i gatti.

Negazione. Esiste un topo che non ha paura di tutti i gatti (cioè esistono un topo e un gatto tali che quel topo non ha paura di quel gatto).

(c) Esiste un topo che ha paura di qualche gatto.

Negazione. Nessun topo ha paura di nessun gatto.

(d) Esiste un topo che ha paura di tutti i gatti.

Negazione. Per ogni topo esiste un gatto di cui non ha paura.

Abbiamo visto che

$$(n \text{ dispari} \implies n^2 \text{ dispari}) .$$

Ricordiamo che

$$(A \implies B) \quad \text{è equivalente a} \quad (\sim B \implies \sim A) .$$

Quindi vale il seguente

Teorema Sia $n \in \mathbb{N}$. Se n^2 è pari, allora n è pari.

Quando scriviamo una dimostrazione per assurdo neghiamo la tesi e da questo dobbiamo trarre qualche conseguenza (per arrivare ad un assurdo). Come abbiamo detto, per trarre delle conseguenze, la negazione della tesi deve essere *chiara*, non basta che sia corretta.

Consideriamo il

Teorema di Euclide (circa 300 a.C.) I numeri primi sono infiniti.

Vogliamo procedere per assurdo e dobbiamo quindi negare la tesi (che qui è tutto l'enunciato). Quindi possiamo dire “non è vero che i numeri primi sono infiniti”, cioè “i numeri primi sono finiti”. È equivalente, ma più chiaro dire che “i numeri primi sono $p_1, p_2, p_3, \dots, p_N$ ”. Abbiamo così alcuni oggetti su cui ragionare. La dimostrazione di Euclide prosegue in questo modo: consideriamo il numero

$$A = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_N) + 1 .$$

A non è primo poiché è maggiore di tutti i numeri primi. Osserviamo che $(p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_N)$ è multiplo di tutti i numeri primi, quindi A (che dista “appena” uno) non è divisibile per alcun numero primo, quindi non è composto. Abbiamo così una contraddizione e il teorema è dimostrato.

Vediamo la dimostrazione per assurdo di un altro famoso risultato della matematica greca.

Teorema (scuola pitagorica, circa 500 a.C.) Non esiste un numero razionale il cui quadrato sia 2.

Dimostrazione. Indichiamo con $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali e per assurdo esista p/q razionale tale che $(p/q)^2 = 2$. Possiamo supporre p e q primi tra loro. Allora

$$(p^2 = 2q^2) \implies (p^2 \text{ pari}) \implies (p \text{ pari})$$

per un teorema che abbiamo appena visto. Scriviamo $p = 2s$. Allora

$$((2s)^2 = 2q^2) \implies (4s^2 = 2q^2) \implies (2s^2 = q^2) \implies (q^2 \text{ pari}) \implies (q \text{ pari}) .$$

Dunque p e q sono pari e abbiamo una contraddizione, poiché abbiamo supposto p e q primi tra loro. Questo conclude la dimostrazione.

Formule indici

Consideriamo il seguente

Teorema. Per ogni intero positivo n abbiamo

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2} .$$

Dimostrazione. Se n è pari sommiamo il primo termine (cioè 1) con l'ultimo termine (cioè n), poi il secondo termine (2) con il penultimo termine ($n - 1$), e così via. Otteniamo $n/2$ coppie e ciascuna di esse dà come somma $n + 1$.

Quindi in totale,

$$\frac{n(n + 1)}{2} .$$

Se n è dispari, allora è $n - 1$ pari e la somma dei primi $n - 1$ interi positivi dà

$$\frac{(n - 1)((n - 1) + 1)}{2} = \frac{n(n - 1)}{2} .$$

Resta da aggiungere n . Otteniamo così

$$\frac{n(n - 1)}{2} + n = \frac{n(n + 1)}{2} .$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo visto una delle difficoltà che si incontrano nell'applicare una formula: abbiamo dovuto sostituire $(n - 1)$ al posto di n . Per evitare fatiche inutili possiamo riscrivere la formula in questo modo:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + (k - 2) + (k - 1) + k = \frac{k(k + 1)}{2}$$

(scrivere n , o k , o ℓ , o ... è indifferente). Così è più facile sostituire $n - 1$ al posto di k .

Esercizio. Calcolare

$$100 + 101 + 102 + \dots + 198 + 199 + 200 .$$

Soluzione. La somma dei primi 200 numeri è $\frac{200 \cdot 201}{2}$. La somma dei primi 99 numeri è $\frac{99 \cdot 100}{2}$. Allora

$$100 + 101 + 102 + \dots + 198 + 199 + 200 = \frac{200 \cdot 201}{2} - \frac{99 \cdot 100}{2} = 15150 .$$

Scrivere una somma di numeri in questo modo

$$100 + 101 + 102 + \dots + 198 + 199 + 200 .$$

va bene fino a quando non dobbiamo svolgere calcoli complicati, o vogliamo espressioni più sintetiche. Poi è meglio usare il *Simbolo di sommatoria*:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{j=1}^n a_j ,$$

che significa: sommiamo i numeri a_j quando j percorre tutti i valori interi tra 1 e n compresi.

Il “simbolo di sommatoria” e “la scrittura esplicita, eventualmente con i punti ...” sono due modi di indicare la stessa cosa, di volta in volta usiamo il più comodo.

Esempi

$$\sum_{j=1}^3 j^2 = \underbrace{1}_{\text{corrisponde a } j=1} + \underbrace{4}_{\text{corrisponde a } j=2} + \underbrace{9}_{\text{corrisponde a } j=3}.$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=3}^7 \frac{1}{j+1} \\ = \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{corrisponde a } j=3} + \underbrace{\frac{1}{5}}_{\text{corrisponde a } j=4} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{corrisponde a } j=5} + \underbrace{\frac{1}{7}}_{\text{corrisponde a } j=6} + \underbrace{\frac{1}{8}}_{\text{corrisponde a } j=7} \end{aligned}$$

(notiamo che gli indici interi da 3 a 7 compresi sono cinque).

Ora, come esercizio, calcoliamo il valore, al variare di q della *somma geometrica*

$$\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^n$$

(se $q = 0$ poniamo la somma uguale a 1, qualsiasi sia n).

Teorema. Per ogni $q \neq 1$ abbiamo

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} .$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} (1 - q) \sum_{k=0}^n q^k &= \sum_{k=0}^n q^k - q \sum_{k=0}^n q^k = \sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=0}^n q^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 + \cancel{\sum_{k=1}^n q^k} - q^{n+1} - \cancel{\sum_{k=1}^n q^k} = 1 - q^{n+1} . \end{aligned}$$

LO STUDIO DI UN LIBRO DI MATEMATICA

Ora consideriamo alcune caratteristiche tipiche dello studio di un testo di matematica universitario e cerchiamo di renderle familiari attraverso alcuni esercizi, non importanti per il contenuto, ma per il lavoro specifico richiesto: esemplificare, descrivere un'idea o applicarla in un altro problema, discutere un suggerimento, correggere un ragionamento solo parzialmente errato, etc.

In sostanza stiamo cercando di rispondere ad una domanda cruciale:

Come posso essere ragionevolmente sicuro di avere compreso quello che sto studiando su un libro di Matematica?

LEGGERE UNA DEFINIZIONE

A volte leggendo un ragionamento matematico ci perdiamo perché non ricordiamo le definizioni usate, o più semplicemente perché non le abbiamo capite, cioè **non abbiamo compreso quali sono gli oggetti da esse individuati**. Formalmente una definizione non è altro che la descrizione di un insieme attraverso una proprietà astratta e permette di ragionare nello stesso tempo su tutti gli oggetti dell'insieme.

Chi legge una definizione deve individuare alcuni esempi significativi e imparare anche *grazie ad essi* a ragionare astrattamente, cioè su *tutti* gli oggetti che soddisfano la definizione.

Negli esercizi di questa sezione si chiede di studiare alcune definizioni (presenti in letteratura o di pura fantasia), innanzitutto individuando alcuni esempi di oggetti che le soddisfano e altri esempi di oggetti che non le soddisfano.

Bisogna innanzitutto capire *come sono fatti* gli oggetti che la soddisfano. Successivamente bisogna rispondere ad alcune domande che possono richiedere dimostrazioni o contresempi basati sulla definizione introdotta.

Esercizio. Studiare la seguente

Definizione. Chiamiamo “privo di quadrati” ogni numero intero positivo che non sia divisibile per un quadrato perfetto diverso dall'unità.

Scrivere qualche esempio di numero privo di quadrati, qualche esempio di numero non privo di quadrati, e successivamente rispondere alle seguenti domande.

- (a) È vero che se due numeri sono privi di quadrati, allora anche il loro prodotto è privo di quadrati?
- (b) È vero che se due numeri sono privi di quadrati, allora anche la loro somma è priva di quadrati?
- (c) È vero che se due numeri sono primi e distinti, allora il loro prodotto è privo di quadrati?
- (d) È vero che se un numero è privo di quadrati, allora ogni suo divisore è privo di quadrati?
- (e) È vero che se un numero non è privo di quadrati, allora non è primo?
- (f) È vero che se il prodotto di due numeri è privo di quadrati, allora i due numeri sono privi di divisori comuni positivi diversi da 1?

Soluzione

Alcuni esempi di numeri privi di quadrati.

3. 5. 14. 51 (poiché $51 = 3 \cdot 17$). 110 (poiché $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$).

Alcuni esempi di numeri non privi di quadrati.

104 (poiché $104 = 4 \cdot 26$, e 4 è un quadrato). 27 (poiché $27 = 9 \cdot 3$, e 9 è un quadrato). 50 (poiché $50 = 25 \cdot 2$, e 25 è un quadrato).

Risposte.

(a) È vero che se due numeri sono privi di quadrati, allora anche il loro prodotto è privo di quadrati?

R. Non è vero. Ad esempio, 6 e 15 sono privi di quadrati, ma il loro prodotto 90 non lo è, poiché $90 = 9 \cdot 10$.

(b) È vero che se due numeri sono privi di quadrati, allora anche la loro somma è priva di quadrati?

R. Non è vero. Ad esempio, 3 e 15 sono privi di quadrati, ma la loro somma 18 non lo è, poiché $18 = 9 \cdot 2$.

(c) È vero che se due numeri sono primi e distinti, allora il loro prodotto è privo di quadrati?

R. È vero. Se infatti $p \cdot q$ fosse divisibile per $a^2 > 1$, allora né p né q potrebbero essere divisibili per a^2 poiché primi, e non potrebbero essere entrambi divisibili per a poiché primi distinti.

(d) È vero che se un numero è privo di quadrati, allora ogni suo divisore è privo di quadrati?

R. È vero. Se a è privo di quadrati, allora anche ogni suo divisore b è privo di quadrati. Infatti sia $a = b \cdot c$ e per assurdo sia $b = \ell^2 \cdot d$ (con $\ell > 1$). Allora $a = \ell^2 \cdot d \cdot c$, e quindi a non è privo di quadrati.

(e) È vero che se un numero non è privo di quadrati, allora non è primo?

R. È vero. Se a non è privo di quadrati, allora possiamo scrivere $a = \ell^2 \cdot b$, con $\ell > 1$. Quindi a non è primo.

(f) È vero che se il prodotto di due numeri è privo di quadrati, allora i due numeri sono privi di divisori comuni positivi diversi da 1?

R. È vero. Se il prodotto di due numeri è privo di quadrati, allora i due numeri sono privi di divisori positivi comuni diversi da 1. Infatti, se a e b non sono privi di divisori comuni possiamo scrivere $a = \ell \cdot m$ e $b = \ell \cdot n$ (con $\ell > 1$); allora $a \cdot b = \ell^2 \cdot m \cdot n$ non è privo di quadrati, contro l'ipotesi.

Esercizio. Studiare la seguente definizione (che non esiste in letteratura).

Definizione. Un numero razionale è detto “svelto” se può essere scritto nella forma $\frac{p}{q}$ con p e q numeri primi distinti (ad esempio $\frac{6}{4}$ è svelto perché può essere scritto nella forma $\frac{3}{2}$, dove 3 e 2 sono numeri primi distinti; ricordiamo che 1 non fa parte dei numeri primi).

Scrivere qualche esempio di numero svelto, qualche esempio di numero razionale non svelto, e successivamente rispondere alle seguenti domande.

- (a) È vero che la somma di due numeri svelti non può essere un numero svelto?
- (b) È vero che se a, b, p, q sono numeri primi tutti diversi tra loro, allora $\frac{a}{b} + \frac{p}{q}$ non è svelto?
- (c) È vero che il reciproco di un numero svelto è ancora un numero svelto?
- (d) È vero che il prodotto di due numeri razionali non svelti è un numero razionale non svelto?
- (e) È vero che esistono infiniti numeri svelti compresi tra 0 e 1?
- (f) È vero che la somma di un numero primo e di un numero svelto è un numero svelto?

Soluzione

Alcuni esempi di numeri svelti.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{11}{5} \cdot \frac{29}{3}, \frac{9}{6} \cdot \frac{77}{22}.$$

Alcuni esempi di numeri razionali non svelti.

$$\frac{3}{35} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{77}{11}.$$

Risposte.

(a) È vero che la somma di due numeri svelti non può essere un numero svelto?

R. È falso. Ad esempio $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$ è svelto.

(b) È vero che se a, b, p, q sono numeri primi tutti diversi tra loro, allora $\frac{a}{b} + \frac{p}{q}$ non è svelto?

R. È vero. Infatti per dimostrare che $\frac{a}{b} + \frac{p}{q} = \frac{aq+bp}{bq}$ non è svelto è sufficiente provare che $aq + bp$ non è multiplo di b né di q , e quindi la frazione non può essere semplificata. Per simmetria è sufficiente provare che $aq + bp$ non è multiplo di b). Infatti bp è multiplo di b , mentre aq non lo è.

(c) È vero che il reciproco di un numero svelto è ancora un numero svelto?

R. È vero (ed è ovvio).

(d) È vero che il prodotto di due numeri razionali non sveltati è un numero razionale non svelto?

R. È falso. Ad esempio $\frac{3}{10} \cdot \frac{10}{7} = \frac{3}{7}$ è svelto e prodotto di numeri non sveltati.

(e) È vero che esistono infiniti numeri sveltati compresi tra 0 e 1?

R. È vero. Infatti sappiamo che esistono infiniti numeri primi: 2, 3, 5, 7, 11, ... e i numeri $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{11}, \dots$ sono tutti sveltati e compresi tra 0 e 1.

(f) È vero che la somma di un numero primo e di un numero svelto è un numero svelto?

R. È falso. Invece di scrivere subito il contreesempio, vediamo come arrivarci. Stiamo considerando una somma della forma $a + \frac{p}{q} = \frac{aq+p}{q}$ con a, p, q primi e $p \neq q$. Osserviamo che $\frac{aq+p}{q}$ è svelto se e solo se $aq + p$ è primo e diverso da q . È però facile trovare a, p, q in modo che $aq + p$ non sia primo. Basta scegliere 3, 5, 7. Infatti $3 + \frac{5}{7} = \frac{26}{7}$ non è svelto.

CAPIRE, CIOÈ SAPER APPLICARE

Un'idea che può essere usata una sola volta è un trucco. Se la potete usare più di una volta, diventa un metodo. (George Pólya e Gabor Szegő, Problems and theorems in Analysis)

Comprendiamo realmente un'idea, un ragionamento, una tecnica di calcolo se (e sole se) siamo in grado di riutilizzarli in un'altra situazione. Quindi essere capaci di *riciclare* un'idea è un modo per verificare se l'abbiamo fatta nostra. In ciascun esercizio di questa sezione viene proposta la soluzione di un problema o la dimostrazione di un teorema (Problema I o Teorema I). Poi si chiede di utilizzare l'idea, il ragionamento, le tecniche così imparate per risolvere un altro problema o dimostrare un altro teorema (chiamati Problema II o Teorema II).

Esercizio Si consideri il

Problema I. Risolvere l'equazione di secondo grado nella variabile reale x

$$ax^2 + bx + c = 0 ,$$

dove a, b, c sono numeri reali e $a \neq 0$.

Soluzione del Problema I. Possiamo dividere per a e studiare l'equazione

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 ,$$

che è equivalente a

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} ,$$

cioè

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} .$$

Poiché stiamo cercando soluzioni reali, supponiamo $b^2 - 4ac \geq 0$. Allora l'ultima equazione è equivalente a

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} , \quad \text{cioè} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} .$$

Problema II. Risolvere l'equazione di terzo grado nella variabile reale x

$$x^3 + 3x^2 + 3x = 10 .$$

Soluzione

Per risolvere l'equazione

$$x^3 + 3x^2 + 3x = 10$$

completiamo il cubo a sinistra (nella soluzione del Problema 1 avevamo completato un quadrato), dato che basta aggiungere 1. Otteniamo

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 11$$

$$(x + 1)^3 = 11 ,$$

$$x + 1 = \sqrt[3]{11} ,$$

$$x = \sqrt[3]{11} - 1 .$$

Esercizio Si consideri il

Teorema I. Un numero intero positivo è divisibile per 9 se e solo se la somma delle sue cifre è divisibile per 9.

Dimostrazione del Teorema I. *Scriviamo un intero positivo M in forma decimale:*

$$\begin{aligned} M &= a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 \\ &= a_m (9+1)^m + a_{m-1} (9+1)^{m-1} + \dots + a_2 (9+1)^2 + a_1 (9+1) + a_0 \end{aligned}$$

(le cifre $a_0, a_1, \dots, a_m$ sono numeri interi compresi tra 0 e 9). Ora osserviamo che per ogni intero positivo k abbiamo

$$(9+1)^k = 1 + \text{un multiplo di } 9,$$

poiché il risultato del prodotto

$$(9+1)^k = \underbrace{(9+1) \times (9+1) \times \dots \times (9+1)}_{k \text{ parentesi}}$$

è una somma di addendi, ciascuno dei quali è il prodotto di k termini, uno da ciascuna parentesi; in questi prodotti c'è sempre almeno un 9, tranne in un caso: quando si sceglie 1 in tutte le parentesi.

Allora

$$\begin{aligned}M &= a_m (1 + \text{un multiplo di } 9) + a_{m-1} (1 + \text{un multiplo di } 9) + \dots \\&\quad + a_1 (1 + 9) + a_0 \\&= a_m + a_{m-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0 + \text{un multiplo di } 9 ,\end{aligned}$$

poiché una somma di multipli di 9 è ancora un multiplo di 9. Quindi M è divisibile per 9 se e solo se la somma $a_m + a_{m-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$ lo è.

Teorema II. Un numero intero positivo è divisibile per 11 se e solo se la somma delle sue cifre con i segni alterni è divisibile per 11 (ad esempio la somma delle cifre di 387607 con i segni alterni è $3 - 8 + 7 - 6 + 0 - 7 = -11$ e quindi 387607 è divisibile per 11).

Soluzione

Procediamo come nella dimostrazione del Teorema I, ma ora scriviamo $10 = 11 - 1$ invece di $10 = 9 + 1$. In questo modo, partendo da un intero positivo M scritto in forma decimale otteniamo

$$\begin{aligned} M &= a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 \\ &= a_m (11 - 1)^m + a_{m-1} (11 - 1)^{m-1} + \dots + a_1 (11 - 1) + a_0 \end{aligned}$$

($a_0, a_1, \dots, a_m$ sono interi compresi tra 0 e 9). Ora osserviamo che per ogni intero positivo k abbiamo

$$(11 - 1)^k = \begin{cases} +1 + \text{un multiplo di } 11 & \text{se } k \text{ è pari} \\ -1 + \text{un multiplo di } 11 & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases} \quad (1)$$

Infatti

$$(11 - 1)^k = \underbrace{(11 - 1) \times (11 - 1) \times \dots \times (11 - 1)}_{k \text{ parentesi}}$$

è una somma di addendi, ciascuno dei quali è il prodotto di k termini, uno da ciascuna parentesi.

In questi prodotti c'è sempre almeno un 11, tranne in un caso: quando si sceglie -1 in tutte le parentesi (e in questo caso il prodotto dei -1 è uguale a $+1$ se k è pari, mentre è uguale a -1 se k è dispari).

Esiste un modo sintetico per scrivere (1): per ogni intero positivo k si ha

$$(11 - 1)^k = (-1)^k + \text{un multiplo di } 11 . \quad (2)$$

Allora, se m è pari,

$$M = +a_m - a_{m-1} + \dots + a_2 - a_1 + a_0 + \text{un multiplo di } 11 ,$$

mentre se m è dispari,

$$M = -a_m + a_{m-1} - \dots + a_2 - a_1 + a_0 + \text{un multiplo di } 11 .$$

Quindi M è divisibile per 11 se e solo se $a_m - a_{m-1} - \dots + a_2 - a_1 + a_0$ è divisibile per 11.

IMPARARE A CORREGGERE

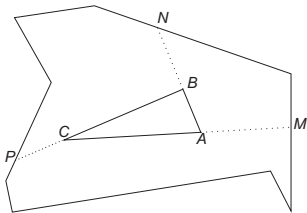
Due cose l'esperienza deve insegnare: la prima, che bisogna correggere molto; la seconda, che non bisogna correggere troppo. (Eugène Delacroix, Journal)

Ci sono dimostrazioni giuste e dimostrazioni sbagliate (così come esistono macchine o software che funzionano, a differenza di altri). Ragionare solo in termini di *giusto / sbagliato, funziona / non funziona* è però soprattutto il punto di vista del lettore o dell'utilizzatore, mentre spesso chi ha ideato una dimostrazione o una macchina o un software si è mosso in modo più "graduale", passando per argomentazioni o prodotti *sempre meno sbagliati*. In matematica è quindi importante capire se una dimostrazione è *fuori strada* o se è *vicina* ad una dimostrazione corretta, nel senso che si basa su un'idea valida, ma è scritta male, o è mancante o sbagliata in qualche passaggio secondario (comunque emendabile). In ciascun esercizio di questa sezione viene proposto un teorema vero o un problema risolvibile, con una dimostrazione (o soluzione) che, pur seguendo un'idea utile, è però errata o comunque insoddisfacente. Si chiede di riscrivere la dimostrazione o la soluzione in modo corretto e completo. Questo richiede attenzione, senso critico e talvolta qualcosa di più.

Esercizio Correggere la dimostrazione del seguente teorema.

Teorema. *Se un triangolo è interamente contenuto in un poligono, allora il suo perimetro non è maggiore di quello del poligono.*

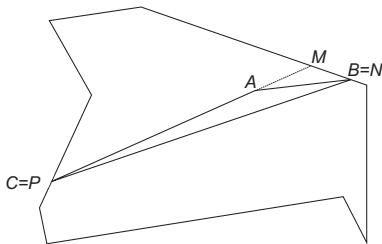
Dimostrazione (da correggere!). Sia ABC il triangolo. Prolunghiamo il lato CA dalla parte di A , il lato AB dalla parte di B e il lato BC dalla parte di C . Indichiamo rispettivamente con M , N , P i punti in cui questi prolungamenti incontrano il bordo del poligono, che viene così suddiviso in tre spezzate distinte (che immaginiamo di percorrere in senso antiorario): MN , NP e PM .



Ora ricordiamo che un lato di un poligono ha lunghezza minore della somma delle lunghezze degli altri lati. Allora, considerando il poligono costituito da NA , da AM e dalla spezzata MN otteniamo (indicando i lati, le spezzate e le loro misure con lo stesso simbolo) $AB \leq MN$. Analogamente otteniamo $BC \leq NP$ e $CA \leq PM$. Sommando le disuguaglianze vediamo che il perimetro di ABC è minore od uguale al perimetro del poligono.

Soluzione dell'Esercizio 60

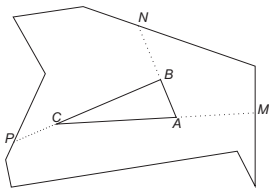
Critiche. Il passaggio in cui si dice che $AB \leq MN$ è sbagliato, come mostra la figura seguente.



L'idea di usare la disuguaglianza triangolare sui lati di ABC è però buona e va solo usata con più cura, come nella dimostrazione che segue.

Dimostrazione corretta.

Sia ABC il triangolo. Prolunghiamo il lato CA dalla parte di A , il lato AB dalla parte di B e il lato BC dalla parte di C . Indichiamo rispettivamente con M , N , P i punti in cui questi prolungamenti incontrano il bordo del poligono, che viene così suddiviso in tre spezzate distinte: MN , NP e PM .



Applicando la disuguaglianza triangolare otteniamo

$$AN = AB + BN \leq AM + MN$$

$$BP = BC + CP \leq BN + NP$$

$$CM = CA + AM \leq CP + PM ,$$

cioè

$$AB \leq AM + MN - BN , \quad BC \leq BN + NP - CP , \quad CA \leq CP + PM - AM .$$

Sommando queste ultime disuguaglianze otteniamo la tesi:

$$AB + BC + CA \leq MN + NP + PM .$$

Esercizio Correggere la dimostrazione del seguente teorema.

Teorema. Per nessun intero positivo n il numero $2^n + 1$ è divisibile per 7.

Dimostrazione (da correggere!). Supponiamo per assurdo che esista un intero positivo h tale che

$$2^n + 1 = 7h ,$$

allora h è dispari, altrimenti $2^n + 1$ sarebbe pari. Scriviamo $h = 2a + 1$, quindi

$$2^n = 7(2a + 1) - 1 = 14a + 6$$

$$2^{n-1} = 7a + 3 .$$

Anche a è dispari ($a = 2b + 1$) e dividendo otteniamo

$$2^{n-1} = 7(2b + 1) + 3 = 14b + 10$$

$$2^{n-2} = 7b + 5 .$$

Così procedendo si arriva a

$$2 = 7z + \text{numero positivo dispari} ,$$

(con $z \geq 0$ intero) che è impossibile.

Soluzione

Critiche. Se proseguiamo dove la dimostrazione si era interrotta osserviamo che b è dispari ($b = 2c + 1$) e quindi

$$2^{n-2} = 7(2c + 1) + 5 = 14c + 12$$

$$2^{n-3} = 7c + 6 .$$

Non è quindi vero che il resto è sempre dispari! Tuttavia, proseguendo di un altro passo, si vede come “aggiustare” la dimostrazione, nel modo seguente.

Dimostrazione corretta. Supponiamo per assurdo che esistano n e h interi positivi tali che

$$2^n + 1 = 7h ,$$

allora h è dispari ($h = 2a + 1$, con $a \geq 0$) e quindi

$$2^n = 7(2a + 1) - 1 = 14a + 6$$

$$2^{n-1} = 7a + 3 .$$

Anche a è dispari ($a = 2b + 1$, con $b \geq 0$) e allora

$$2^{n-1} = 7(2b + 1) + 3 = 14b + 10$$

$$2^{n-2} = 7b + 5 .$$

Di conseguenza b è dispari ($b = 2c + 1$, con $c \geq 0$) e quindi

$$2^{n-2} = 7(2c + 1) + 5 = 14c + 12$$

$$2^{n-3} = 7c + 6 .$$

Adesso c dev'essere pari ($c = 2d$, con $d \geq 0$) e quindi

$$2^{n-3} = 7(2d) + 6 = 14d + 6$$

$$2^{n-4} = 7d + 3 ,$$

ricadendo così nel primo caso. Quindi alla fine otteniamo

$$2 = 7z + (3 \text{ oppure } 5 \text{ oppure } 6) ,$$

che è in ogni caso impossibile.

CAPIRE, CIOÈ SAPER SPIEGARE

*Non siamo molto soddisfatti quando siamo obbligati ad accettare una verità matematica attraverso una complicata catena di conclusioni formali e calcoli che seguiamo ciecamente, passo a passo, trovando la strada a tentoni. Vogliamo prima una visione di insieme della meta e della strada; vogliamo capire l'idea della dimostrazione, il contesto più profondo. (Hermann Weyl, *Topology and Abstract Algebra as Two Roads of Mathematical Comprehension*, Amer. Math. Monthly, 102 (1995))*

Spesso una dimostrazione o una tecnica di calcolo nasce da una o poche idee non terribilmente complicate. Se però non capiamo l'idea che è alla base di un ragionamento, i passaggi sembrano misteriosi. In questa sezione si propone di leggere le dimostrazioni di alcuni teoremi, verificandone la correttezza, sia in generale, sia, quando possibile, su opportuni esempi. Chiediamo quindi di *individuare l'idea* della dimostrazione, scrivendola in modo discorsivo. Gli eventuali esempi e l'idea individuata possono poi essere confrontati con la soluzione proposta. Più che negli esercizi precedenti, qui la "Soluzione" è solo un commento.

Noi non lo faremo, ma sarebbe utile riscrivere la dimostrazione su un foglio bianco affidandosi solo al ricordo dell'idea / delle idee individuate.

Esercizio Studiare il seguente

Problema. Diciamo che un numero intero positivo è privo di quadrati se non è divisibile per alcun quadrato perfetto. Ad esempio 3, 21, 30 sono privi di quadrati. Se un intero positivo non è privo di quadrati diciamo che contiene quadrati. Ad esempio 4, 27, 50 contengono quadrati. Osserviamo l'esistenza di alcune coppie di numeri consecutivi contenenti quadrati, ad esempio 8 e 9. Esistono infinite coppie con questa proprietà?

Soluzione del problema.

Per ogni intero positivo pari n consideriamo i due numeri

$$a_n = n \cdot (n + 2), \quad b_n = (n + 1)^2$$

e osserviamo che i due numeri sono consecutivi poiché

$$b_n = n^2 + 2n + 1 = a_n + 1.$$

Per concludere la dimostrazione basta notare che ogni b_n contiene quadrati, mentre $n(n + 2)$ è divisibile per 4.

Soluzione dell'esercizio

L'idea della soluzione è abbastanza semplice: basta osservare che per ogni intero pari n i due numeri $n \cdot (n + 2)$ e $(n + 1)^2$ sono consecutivi e contengono quadrati.

Commento. La soluzione è facile, ed è anche facile da ricordare, ma vale la pena di cercare di capire come può essere venuta alla mente. A tutti noi capita a volte di non sapere come partire in un ragionamento, ma spesso è solo la pigrizia che ci impedisce di iniziare a scrivere e osservare esempi, fino a capire - spesso - cosa succede nel caso generale. E anche se non l'avremo capito, il considerare esempi non sarà stato tempo perso.

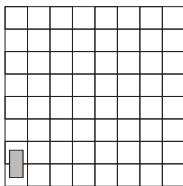
Tornando all'esercizio, questo significa che se ci avessero posto il problema, senza la soluzione, sarebbe stato ragionevole partire scrivendo e **guardando** i primi esempi di coppie di numeri consecutivi contenenti quadrati (quale motivo, se non la pigrizia, ci avrebbe impedito di farlo!):

$$\left\{ \begin{array}{ll} 8 = 2 \cdot 4 & 9 = 3^2 \\ 24 = 4 \cdot 6 & 25 = 5^2 \\ 27 = 3 \cdot 9 & 28 = 4 \cdot 7 \\ 44 = 4 \cdot 11 & 45 = 5 \cdot 9 \\ 48 = 6 \cdot 8 & 49 = 7^2 \\ 63 = 7 \cdot 9 & 64 = 8^2 \\ 75 = 3 \cdot 25 & 76 = 4 \cdot 19 \\ 80 = 8 \cdot 10 & 81 = 9^2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \blacksquare \\ \blacksquare \\ \\ \blacksquare \\ \\ \blacksquare \end{array}$$

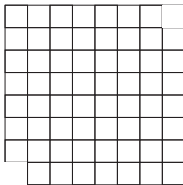
Notiamo che la prima, seconda, quinta e ottava coppia seguono lo stesso *schema*: il primo numero è il prodotto di due numeri pari che hanno differenza 2, mentre il secondo è il quadrato del numero compreso tra i due. È a questo punto naturale investigare se questo schema funziona in generale, cioè se è vero che, dato un intero positivo pari n , i due numeri $n \cdot (n + 2)$ e $(n + 1)^2$ sono consecutivi. È immediato verificare che è così. Inoltre $(n + 1)^2$ contiene quadrati (ovviamente!), mentre $n \cdot (n + 2)$ è prodotto di due numeri pari, e quindi è divisibile per 4. Notiamo che non tutti gli esempi elencati rientrano nello schema proposto (ad esempio, 27 e 28).

Esercizio Studiare il seguente

Teorema. Consideriamo una tavola da gioco di 64 caselle e supponiamo di avere dei tasselli rettangolari (come quelli del gioco del domino), ciascuno dei quali può ricoprire due caselle della tavola, come mostra il tassello in questa figura.

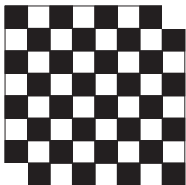


È allora facile (e lo si può fare in vari modi) ricoprire la tavola con 32 tasselli rettangolari. Ora ripuliamo la tavola e togliamole la prima casella in basso a sinistra e l'ultima in alto a destra:



Restano così 62 caselle, che è impossibile ricoprire con 31 tasselli rettangolari.

Dimostrazione. Coloriamo le caselle di bianco e nero come in una normale scacchiera. Osserviamo che, delle 62 caselle rimaste, 32 sono scure e 30 chiare (o viceversa), perché le due caselle tolte sono comunque dello stesso colore.



D'altra parte ogni tassello rettangolare ricopre una casella chiara ed una scura. Quindi il ricoprimento è impossibile.

Verificata la correttezza dei passaggi, ci poniamo qualche domanda.

Ad esempio

Il numero di caselle di ogni lato della scacchiera (8 caselle) ha importanza? Se fosse 7, oppure 10?

Come può essere stata trovata la dimostrazione?

Soluzione dell'esercizio

Mostrare l'impossibilità del ricoprimento può sembrare a priori molto difficile, se non viene subito l'idea della dimostrazione, in quanto il numero di ricoprimenti possibili è elevato.

La dimostrazione appare di una semplicità sconcertante. Si ragiona per assurdo supponendo che il ricoprimento delle 62 caselle sia possibile disponendo opportunamente 31 tasselli rettangolari. L'idea principale è colorare le caselle come su una scacchiera, il che fa balzare all'occhio qualcosa che altrimenti poteva sfuggire: le caselle tolte sono dello stesso colore, mentre ogni tassello ricopre due caselle adiacenti, quindi necessariamente con colori diversi. Questo richiede la presenza di 31 caselle chiare e 31 caselle scure. Si ottiene così una contraddizione.

Resta l'insoddisfazione di ammirare un ragionamento cui forse non avremmo pensato. Prima però di concludere "Qualcuno ci arriva e gli altri no" proviamo a domandarci nuovamente come viene può essere venuta alla mente una dimostrazione di questo tipo.

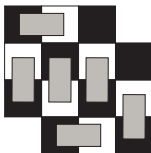
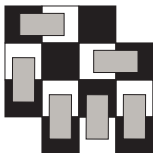
Insistiamo sul fatto che può essere utile osservare dei casi particolari (se ad esempio, un enunciato riguarda un generico numero naturale n , è bene vedere cosa succede per qualche valore basso di n , per il quale l'enunciato è forse direttamente verificabile). Cosa può voler dire questo per il problema della scacchiera? Qui non vediamo un parametro di cui può essere utile, all'inizio, considerare un valore fissato, nè si parla di una figura geometrica (un triangolo, un trapezio, ...) di cui può essere significativo studiare inizialmente un caso particolare (ad esempio supponendolo isoscele ...).

Tuttavia, dopo un esame attento, quello che abbiamo appena detto non appare più vero. Infatti l'ipotesi che la scacchiera sia 8×8 non entra nella dimostrazione, che in realtà vale per ogni scacchiera $(2n) \times (2n)$ (solo le scacchiere con un numero pari di quadratini sono ricopribili con tasselli di domino).

Sarebbe stato ragionevole studiare il problema su una scacchiera con poche caselle. Il caso 2×2 è troppo banale. Invece il caso 4×4 è già significativo:



Conviene effettuare alcuni tentativi, come i seguenti:



Ora è più facile osservare che le caselle che restano scoperte sono entrambe nere.

Non sempre le idee semplici sono le più facili da scoprire. La semplicità a volte è un punto d'arrivo faticosamente raggiunto, imparando un po' alla volta a vedere l'essenziale, oltre l'apparente complicazione del problema.

Mostrare la semplicità di ciò che appare complesso e la complessità di ciò che appare semplice: ecco la lezione di un grande maestro.

Zhu Xiao-Mei, Il pianoforte segreto

In questo modo abbiamo deciso che $\frac{1}{1}$ è la prima frazione, che $-\frac{1}{1}$ è la seconda, che $\frac{1}{2}$ è la terza, $\frac{1}{3}$ la quarta, $-\frac{1}{2}$ la quinta, e così via. Ogni frazione ha così un posto in una successione infinita.

Togliendo le ripetizioni (ad esempio, togliamo $\frac{2}{4}$, poiché è già presente $\frac{1}{2}$) e antepoendo lo 0 (tralasciato per ragioni di spazio tipografico) otteniamo tutti i numeri razionali scritti uno dopo l'altro, dunque in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$ ($\frac{1}{1} \leftrightarrow 1$, $-\frac{1}{1} \leftrightarrow 2$, $\frac{1}{2} \leftrightarrow 3$, $\frac{1}{3} \leftrightarrow 4$, $-\frac{1}{2} \leftrightarrow 5$, etc.)

Oltre a verificare la correttezza dei passaggi e capire l'idea della dimostrazione, poniamoci qualche domanda. Ad esempio:

Il modo in cui sono stati ora ordinati i numeri razionali è legato all'ordinamento dato dalla relazione di maggiore/minore (a precede b se $a < b$)?

Non si può percorrere tutta la prima riga, poi tutta la seconda, etc.?

Soluzione dell'esercizio. La prima idea consiste nel *mettere in fila* non i numeri razionali, ma le frazioni (anche se sono “di più”, a causa dei vari modi di scrivere un razionale, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \dots$). Per mettere in fila le frazioni, consideriamo una tabella infinita e disponiamo nella prima riga quelle con denominatore 1, alternando le positive e le negative, nella seconda riga quelle con denominatore 2, e così via. Infine percorriamo la tabella verso destra e verso il basso muovendoci su diagonalì di lunghezza sempre maggiore. Questo ci dà un criterio con cui numerare i posti in cui abbiamo collocato le frazioni, e quindi far corrispondere ad ogni frazione un numero naturale. Poiché le righe hanno infiniti termini, *non* avremmo potuto dire “percorriamo la prima riga, poi la seconda ...”.

Osserviamo che il modo in cui sono stati messi in fila i razionali nella dimostrazione del Teorema non ha nulla a che fare con l'usuale ordinamento dei numeri razionali, e non potrebbe averlo, poiché sappiamo che tra due razionali distinti ne esistono infiniti altri (presi $a < b$ in $\mathbb{Q}$ basta considerare $c = \frac{a+b}{2}$ e quindi $d = \frac{a+c}{2}$, etc.) e quindi non esiste il successivo di un razionale secondo l'usuale ordinamento della retta.

Questa dimostrazione potrebbe far pensare che qualunque insieme infinito possa essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$. Invece, come ha mostrato G. Cantor, questo non vale per $\mathbb{R}$.

È infatti sufficiente mostrare che i numeri contenuti nell'intervallo $[0, 1)$ non possono essere posti in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$ (a maggior ragione questo non potrà essere vero per $\mathbb{R}$). Supponiamo per assurdo che sia possibile scrivere

$$[0, 1) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$$

e riportiamo questi numeri uno sotto il successivo, evidenziandone lo sviluppo decimale

$$a_1 = 0, p_{11}p_{12}p_{13}p_{14} \dots$$

$$a_2 = 0, p_{21}p_{22}p_{23}p_{24} \dots$$

$$a_3 = 0, p_{31}p_{32}p_{33}p_{34} \dots$$

$$a_4 = 0, p_{41}p_{42}p_{43}p_{44} \dots$$

$$\vdots$$

(ad es. se $a_2 = 0,2962\dots$ scriviamo $p_{21} = 2, p_{22} = 9, p_{23} = 6, p_{24} = 2, \dots$).

Costruiamo ora il numero

$$\beta = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \dots$$

nel seguente modo:

$$b_j = \begin{cases} 3 & \text{se } p_{jj} = 8 \\ 8 & \text{se } p_{jj} \neq 8 \end{cases} .$$

In questo modo $\beta \in [0, 1)$ ed ha almeno una cifra differente da ciascuno dei numeri a_j . Inoltre β non può avere periodo 9 e quindi β è differente da tutti i numeri a_j . Questo contraddice l'ipotesi che gli a_j esauriscano $[0, 1)$.

Abbiamo evitato i numeri con periodo 9 perché questi numeri sono uguali a numeri con sviluppo decimale finito. Ad esempio

$$0, 3499999999 \dots = 0, 35 .$$