



Tassellazioni: da Escher al tassello Einstein

Indice

1. Formulazione del problema
2. I poligoni convessi
3. Simmetrie
4. Tassellazioni aperiodiche
5. Riferimenti

Piastrelle intorno a noi...

Siamo circondati da pavimenti con mattonelle di tantissime forme, alcune hanno ispirato anche M. C. Escher.



Un pavimento lungo le strade a Il Cairo.



L'Alhambra, un complesso palaziale andaluso a Granada.

Un'infinità di forme

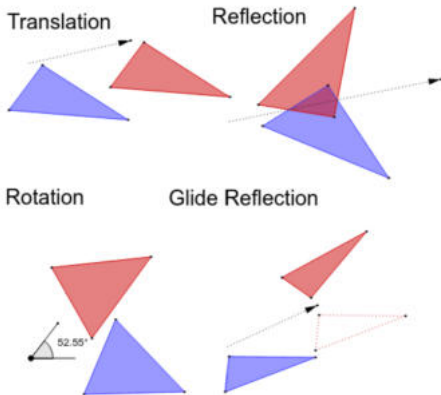
Tassellazione: suddivisione del piano infinito in forme di area finita.

Tassello: una delle forme che compone una tassellazione.



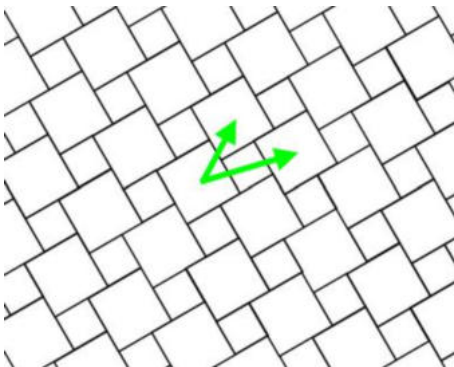
Isometria

Isometria: Una mappa del piano che conserva le distanze. Esistono quattro tipi: traslazioni, rotazioni, riflessioni e riflessioni con scorrimento.



Simmetrie

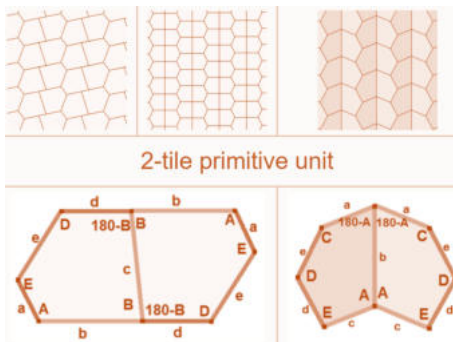
Simmetria di una tassellazione: Un'isometria che mappa i bordi dei tasselli su altri bordi di tasselli.



Tassellazione periodica: tassellazione che presenta due simmetrie di traslazione indipendenti, ovvero si ripete lungo due assi diversi.

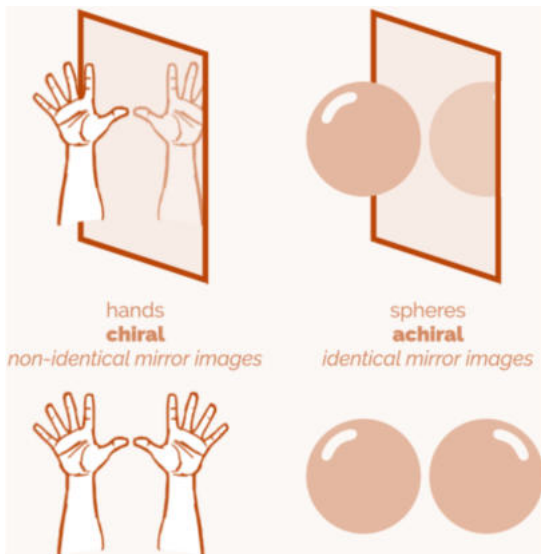
Proprietà

Unità primitiva: sezione della tassellazione, che genera l'intera tassellazione usando solo traslazioni, ed è la più piccola possibile.



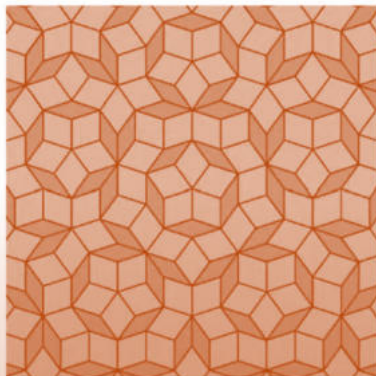
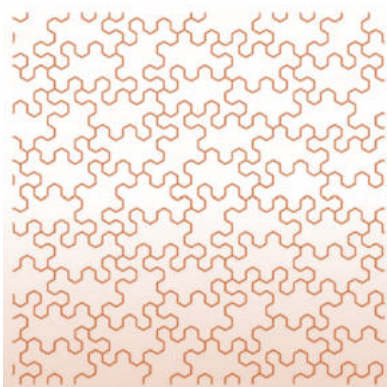
Unità fondamentale: Una sezione della tassellazione che genera l'intera tassellazione usando le simmetrie della tassellazione, ed è la più piccola possibile.

Chiralità



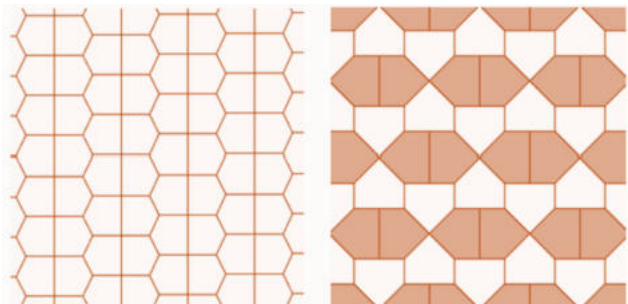
Monoedralità

Tassellazione monoedrale: Una tassellazione in cui tutti i tasselli sono congruenti tra loro, cioè hanno la stessa forma e dimensione (possono però essere immagini speculari).



Tassellazione isoedrale

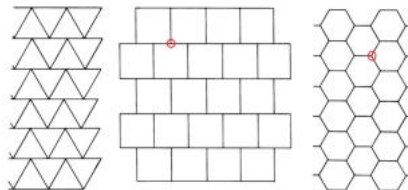
Una tassellazione monoedrale in cui, per ogni coppia di tasselli, esiste una simmetria della tassellazione che trasforma un tassello nell'altro.



Tassellazione k-isoedrale: una monoedrale in cui i tasselli sono suddivisi in k classi: per ogni coppia di tasselli nella stessa classe, esiste una simmetria della tassellazione che li trasforma l'uno nell'altro, per tasselli di classi diverse tale simmetria non esiste.

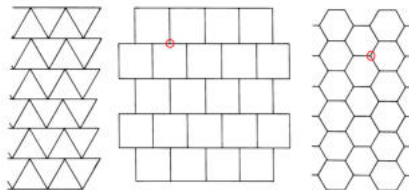
I poligoni regolari

Abbiamo familiarità con tassellazioni costituite da triangoli equilateri, quadrati, o esagoni regolari.



I poligoni regolari

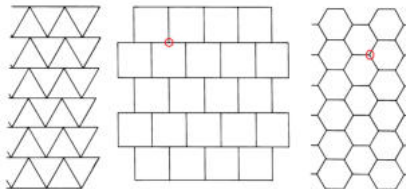
Abbiamo familiarità con tassellazioni costituite da triangoli equilateri, quadrati, o esagoni regolari.



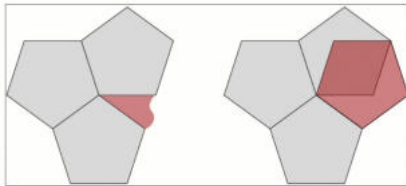
E il pentagono?

I poligoni regolari

Abbiamo familiarità con tassellazioni costituite da triangoli equilateri, quadrati, o esagoni regolari.

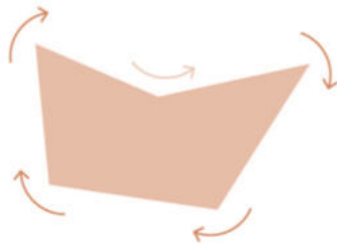
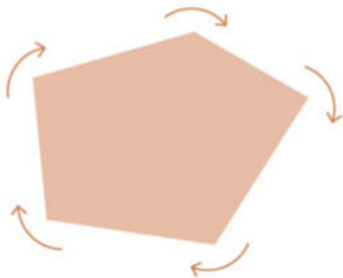


E il pentagono?



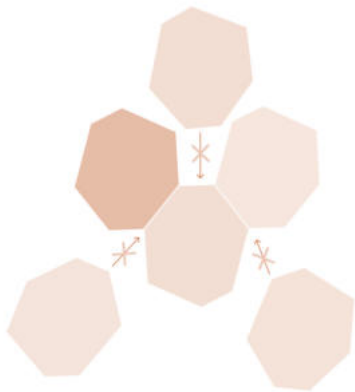
Convessità

Quali poligoni convessi possono tassellare il piano?



Più di sei non si può!

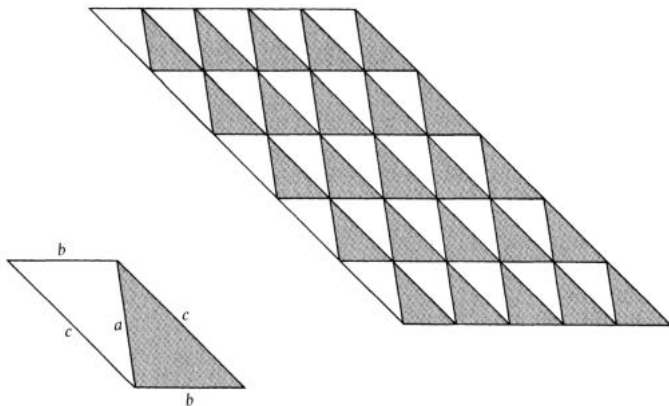
Quali **poligoni convessi** possono tassellare il piano? Consideriamo tassellazioni vertice-a-vertice



La somma degli angoli interni è 900° , in media un angolo: $900/7^\circ$. I vertici hanno 360° da spartirsi, in media $360/(900/7) = 2,8$ eptagoni si incontreranno in un vertice. Ma almeno tre eptagoni si devono incontrare in un vertice, la media $2,8$ è impossibile! Il problema peggiora se il numero dei lati cresce...

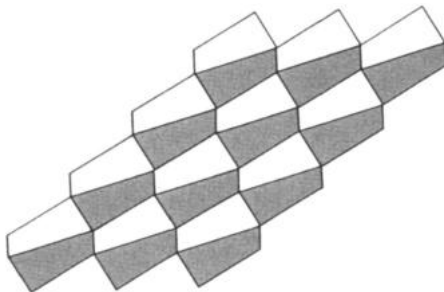
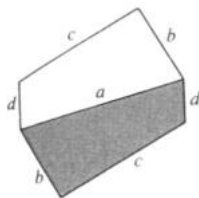
I triangoli

Creiamo un parallelogramma con due copie del triangolo dato e trasliamo così da ottenere una striscia infinita!



I quadrilateri

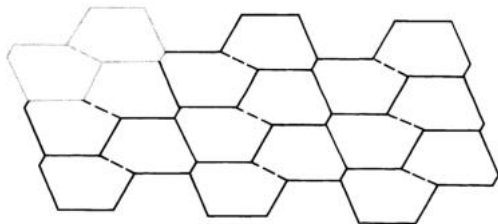
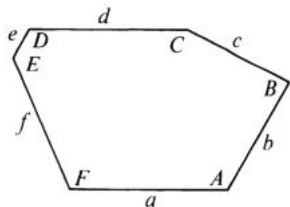
Operiamo una simmetria centrale così da ottenere un esagono. Tale esagono a lati opposti uguali e paralleli: possiamo tassellare il piano!



Gli esagoni

Nel 1918 K. Reinhardt mostrò che ogni esagono convesso tassella il piano se e solo se appartiene ad una delle tre classi seguenti.

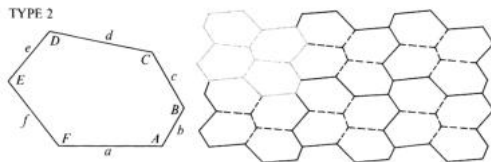
TYPE 1



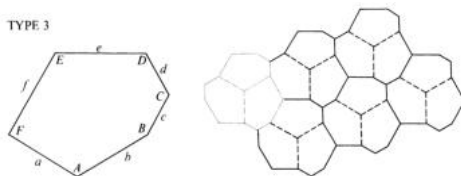
Il primo tipo ha angoli $A + B + C = 360^\circ$ e lati $a = d$.

Gli esagoni

Il secondo ha $A + B + D = 360^\circ$ e lati $a = d, c = e$.



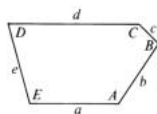
Il terzo $A = C = E = 120^\circ$ e lati $a = b, c = d, e = f$.



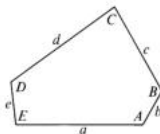
I pentagoni, parte prima

I primi 5 pentagoni furono scoperti dal matematico tedesco K. Reinhardt.

TYPE 1



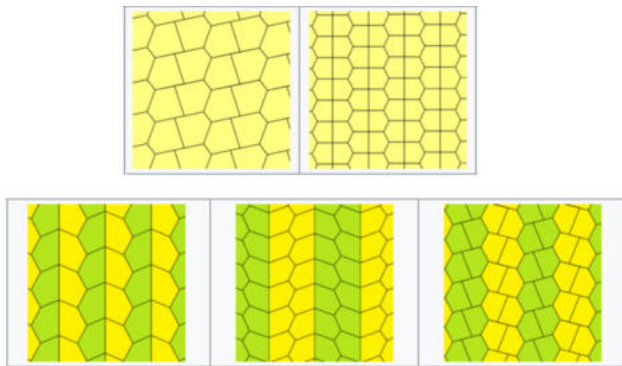
TYPE 2



Le prime due tipologie godono rispettivamente delle seguenti proprietà: 1. $A + B + C = 360^\circ$ e 2. $A + B + D = 360^\circ$ con $a = d$.

I pentagoni, parte prima

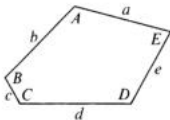
Un pentagono può tassellare il piano in più modi.



Qui è illustrato un esempio per la prima tipologia.

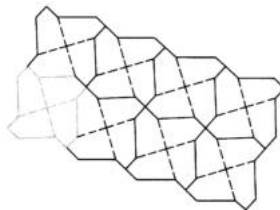
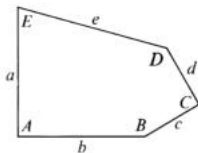
I pentagoni, parte prima

TYPE 3



$$A = C = D = 120^\circ, a = b, d = c + e$$

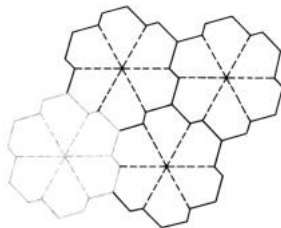
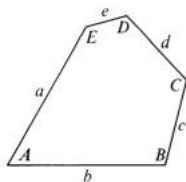
TYPE 4



$$A = C = 90^\circ, a = b, c = d$$

I pentagoni, parte prima

TYPE 5



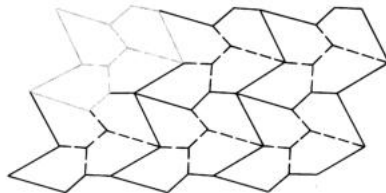
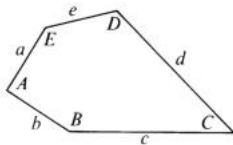
$$A = 60^\circ, C = 120^\circ, a = b, c = d$$

K. Reinhardt chiude la tesi affermando che in principio dovrebbe essere possibile completare la lista dei pentagoni [...] ma potrebbe essere molto tedioso e potrebbero non emergere nuovi.

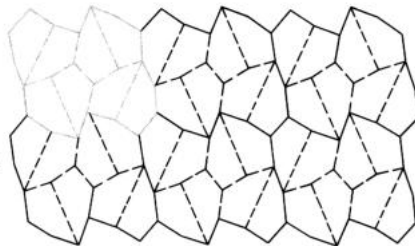
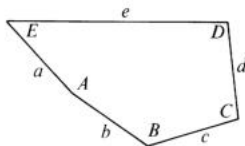
I pentagoni, parte seconda

Fu R. Kershner a scoprire tre nuovi tipi di pentagoni.

TYPE 6



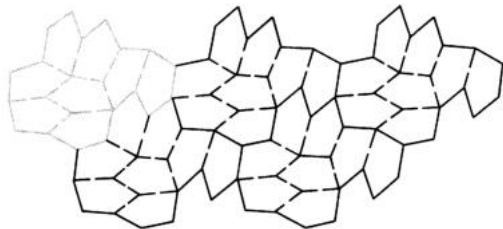
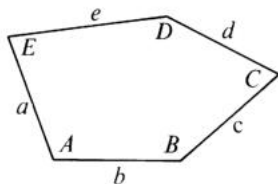
TYPE 7



I pentagoni, parte seconda

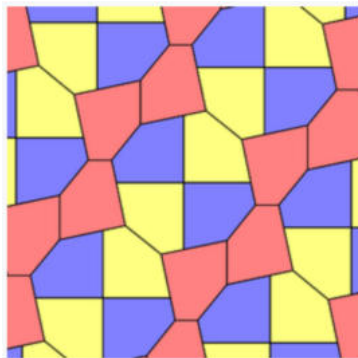
L'articolo di R. Kershner non include una dimostrazione affermante che non ci sono altri pentagoni convessi. L'editore scrive che “una dimostrazione richiederebbe un libro più grande”.

TYPE 8



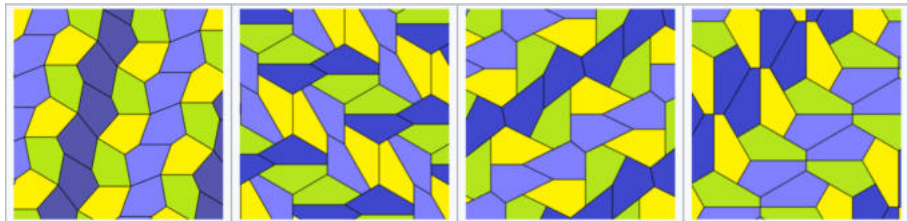
I pentagoni, parte terza

L'informatico R. E. James III lesse l'articolo di Martin Gardner e suggerì un nuovo pentagono.



I pentagoni, parte quarta

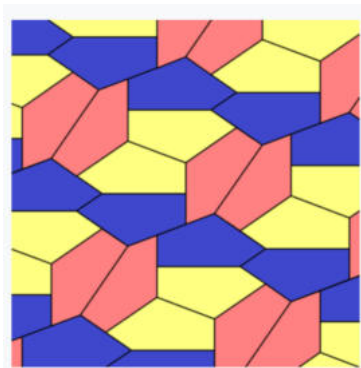
M. Rice, che studiò solo un anno matematica alle superiori, scoprì nuove famiglie di tasselli pentagonali.



I suoi famigliari raccontavano di vederla spesso in cucina a disegnare schizzi con nuove forme.

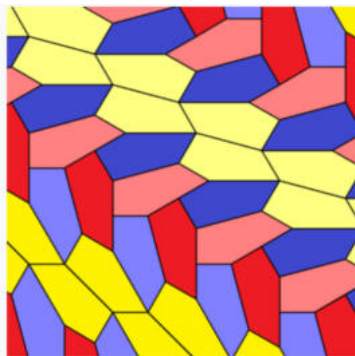
I pentagoni, parte quinta

Nel 1985 R. Stein, uno studente tedesco laureato in matematica, ne scoprì una quattordicesima.



I pentagoni, parte sesta

I matematici C. Mann, J. McLoud e D. Von Derau scoprono una nuova forma pentagonale utilizzando un algoritmo nel 2015.



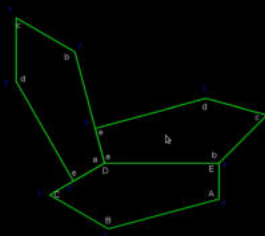
I pentagoni, la fine

Una nuova dimostrazione di M. Rao completa la classificazione dei poligoni convessi: i triangoli, i quadrilateri, tre tipi di esagoni e 15 tipi di pentagoni, che hanno resistito per 99 anni.

```

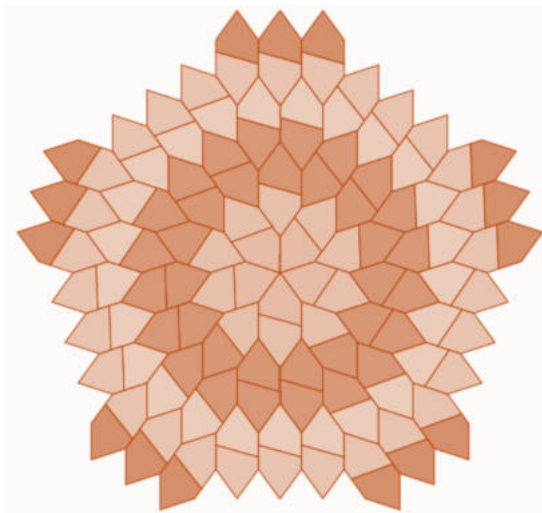
type:
a: 7/12 3/4 1/3 5/6 1/2
s: 0 1/4 11/12 13/12 19/12
b: deg=3
0 0 0 0 1
1 0 0 1 -2
0 1 0 0 -1
0 0 1 0 -1
EP 0 0 1 -> 0 0 1 0 0
EP 0 1 0 -> 0 1 0 0 0
EP 1/4 0 1/4 -> 1/4 0 1/4 1/4 1/4
EP 1/2 0 0 -> 1/2 0 0 1/2 0
-1 -1/2 -1 < -1/2 < 0 0 -1 0 1 < 0
-1 -1/3 -1/3 < -1/3 < -1 0 0 1 < 0
0 -1 0 < 0 < 0 -1 0 0 0 < 0
1 1/2 1/2 < 1/2 < 0 0 0 0 -1 < 0

```



Simmetrie

Ogni tassello ammette almeno una tassellazione periodica.



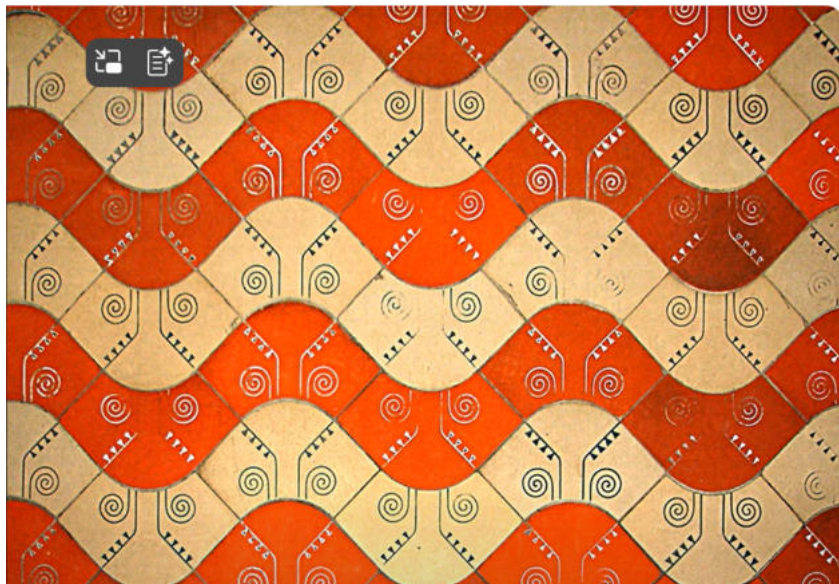
Simmetrie

- Ogni tassello ammette almeno una tassellazione periodica.
- Esistono anche altri tipi di simmetria; simmetria speculare, la simmetria rotazionale, simmetria di riflessione con scorrimento.

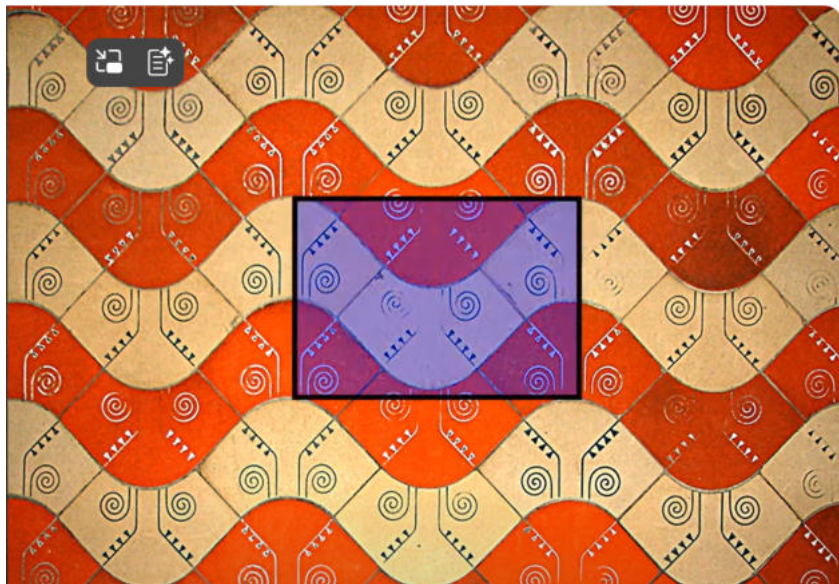
Simmetrie

- Ogni tassello ammette almeno una tassellazione periodica.
- Esistono anche altri tipi di simmetria; simmetria speculare, la simmetria rotazionale, simmetria di riflessione con scorrimento.
- Nel 1891, il cristallografo russo E. Fedorov dimostrò che esistono solo 17 modi in cui queste simmetrie possono essere combinate. Poiché questa limitazione si applica a tutte le decorazioni periodiche del piano, questi modi sono comunemente noti come i 17 “gruppi di carta da parati”.

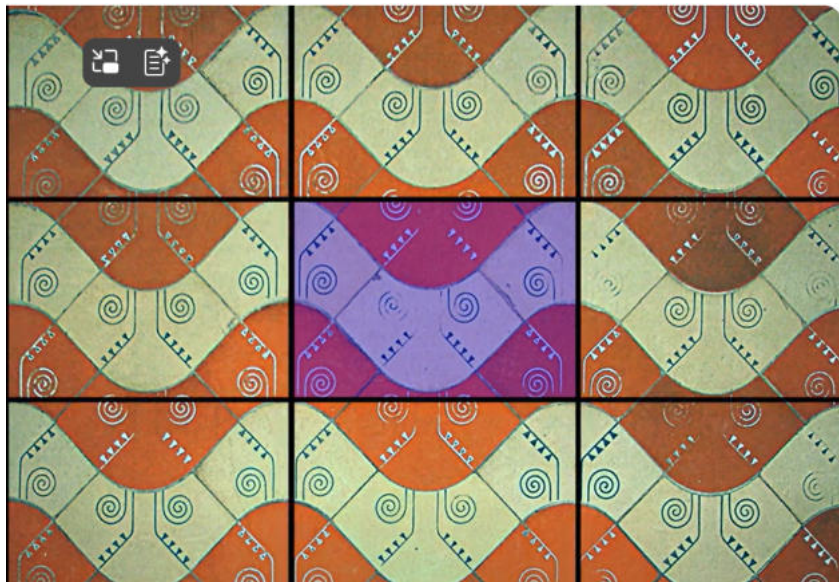
Esempio



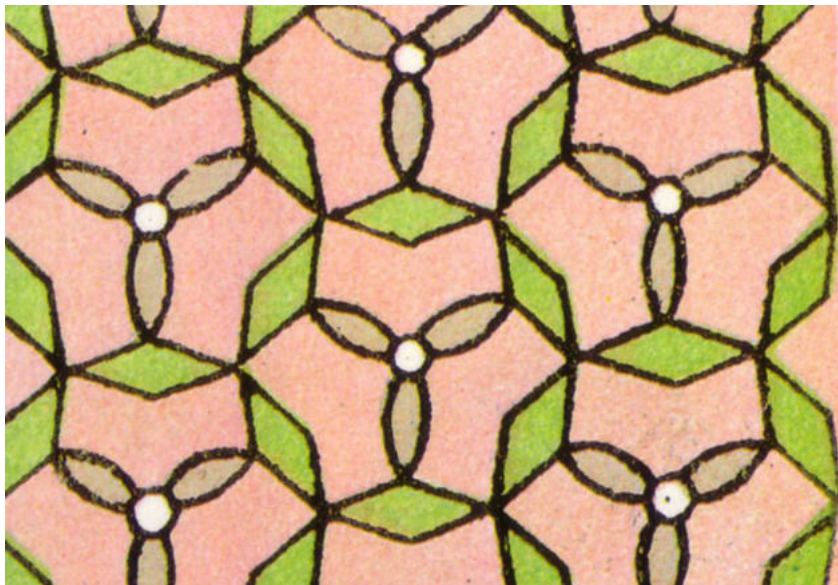
Esempio



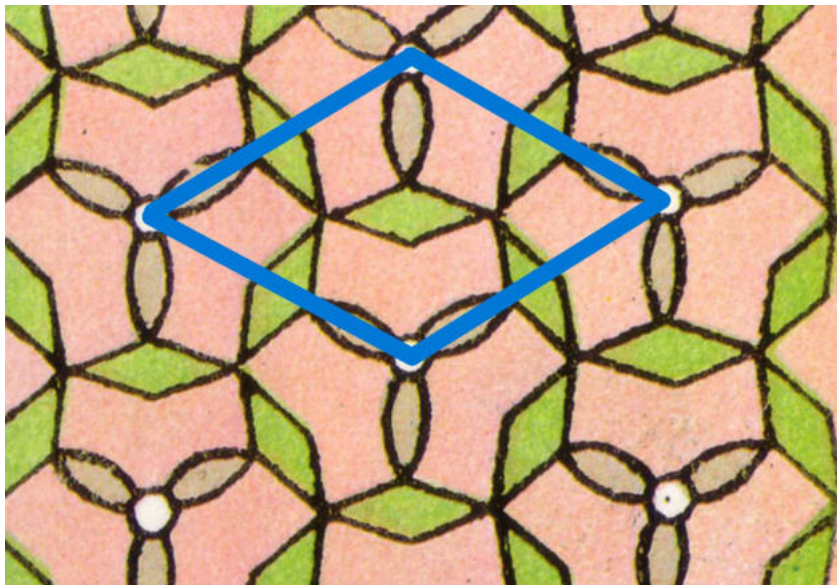
Esempio



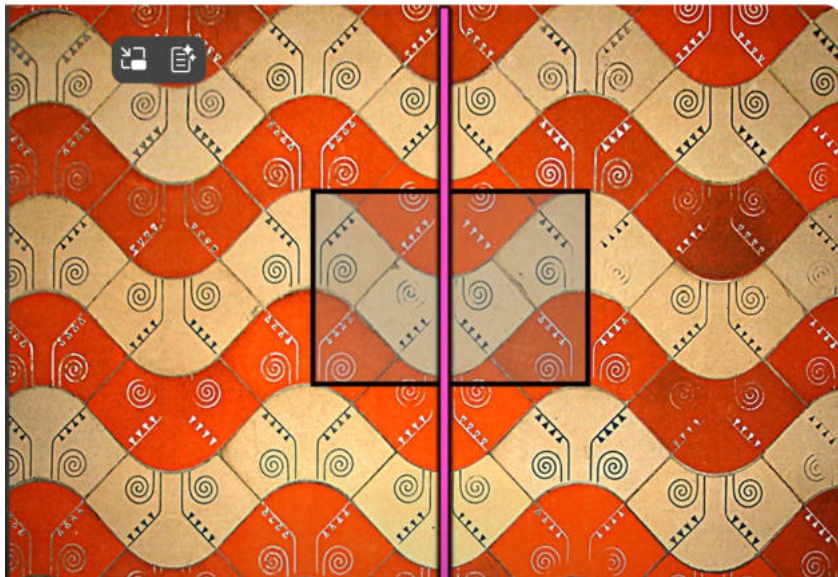
Esempio



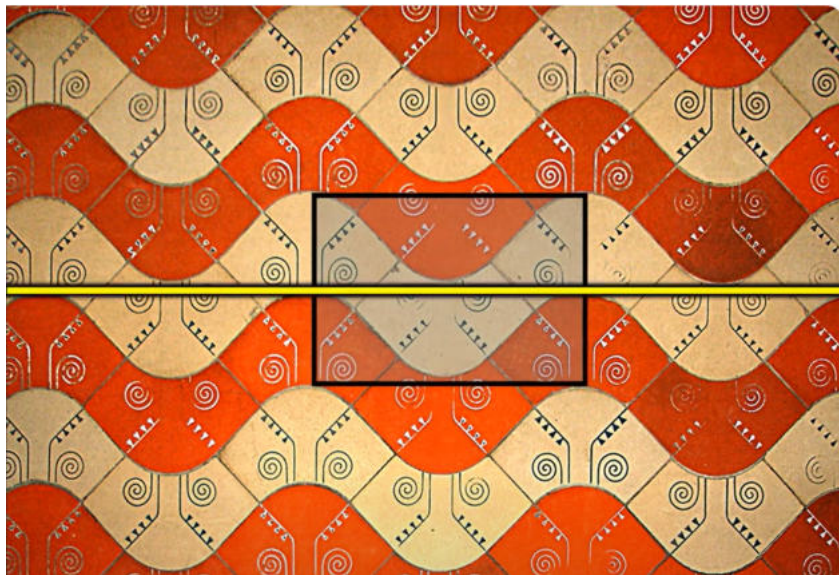
Esempio



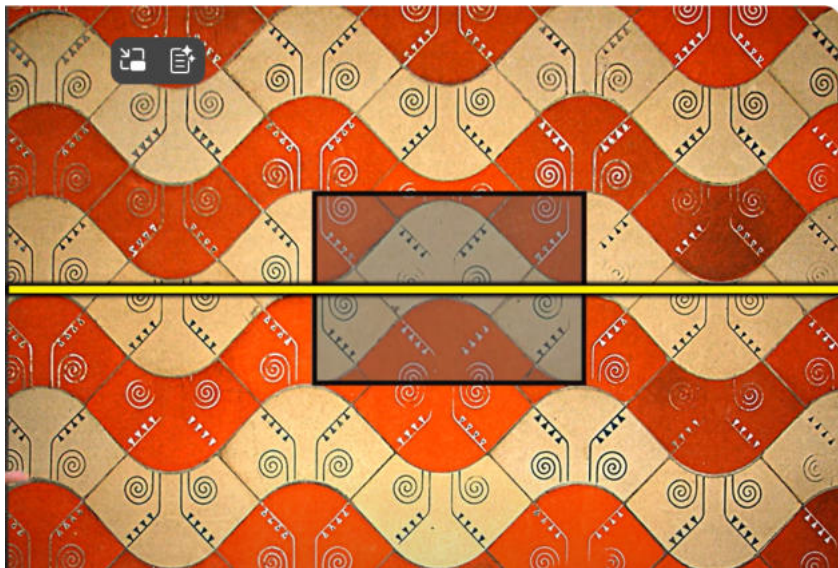
Esempio



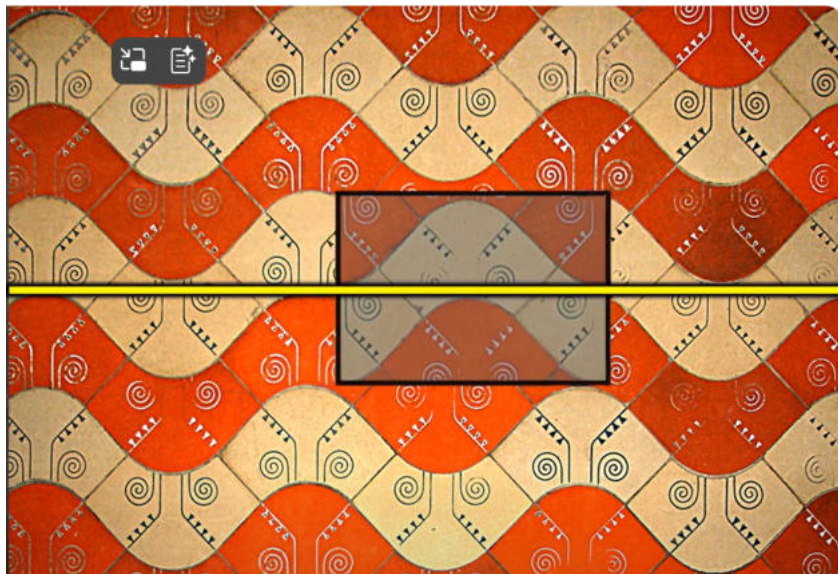
Esempio



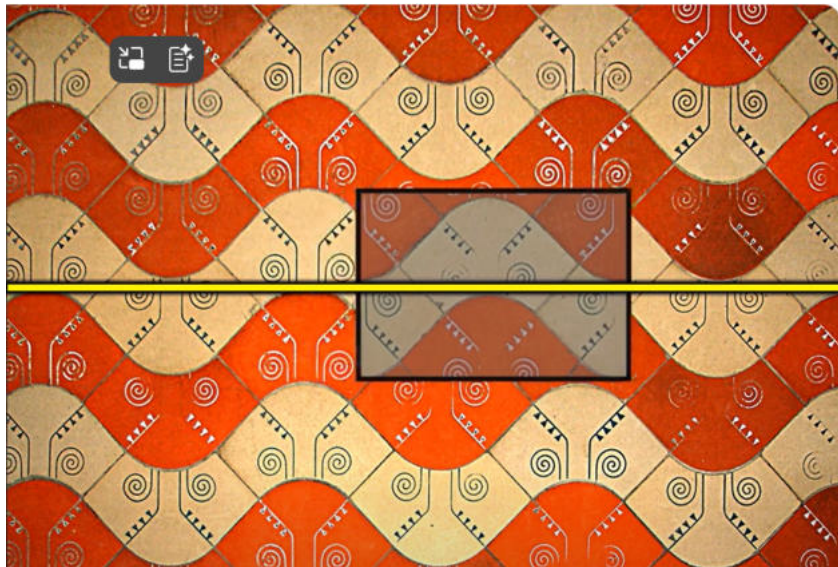
Esempio



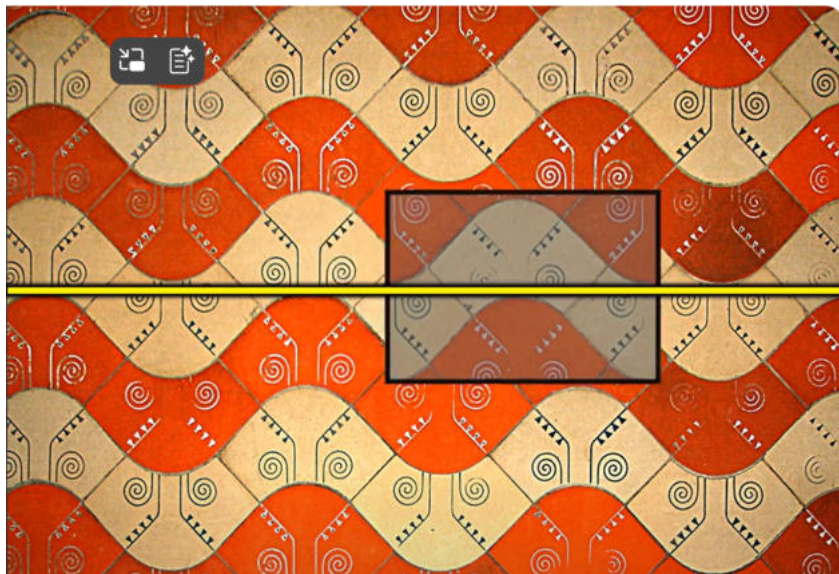
Esempio



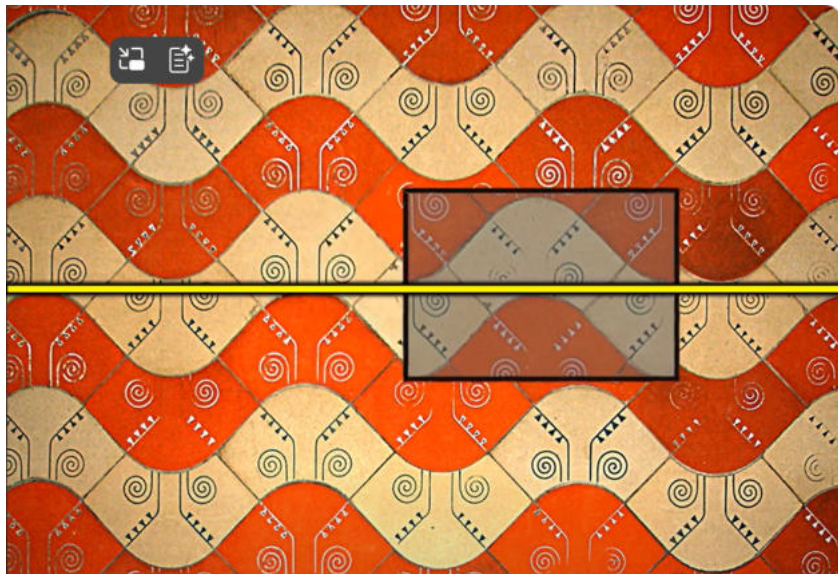
Esempio



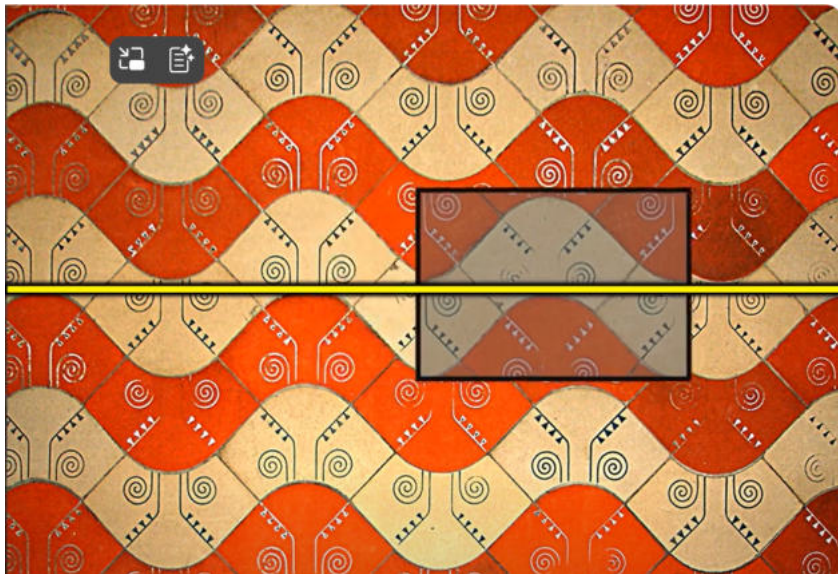
Esempio



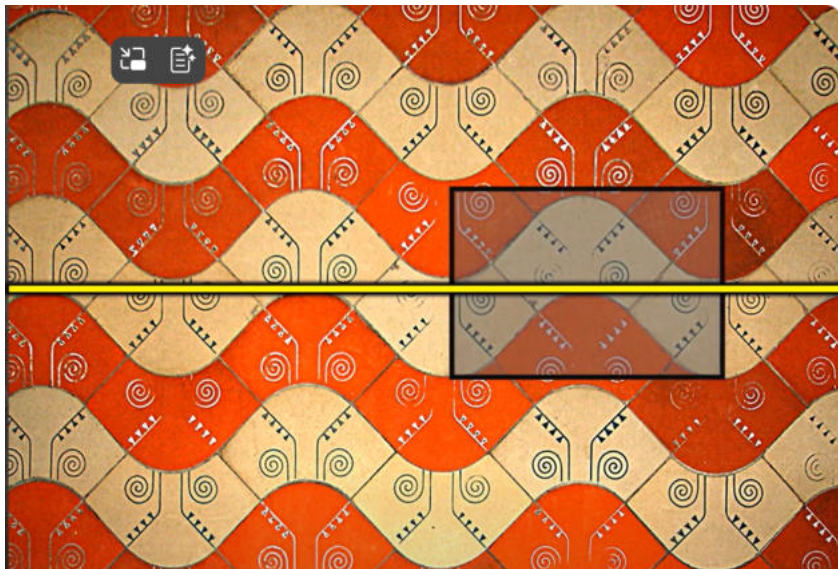
Esempio



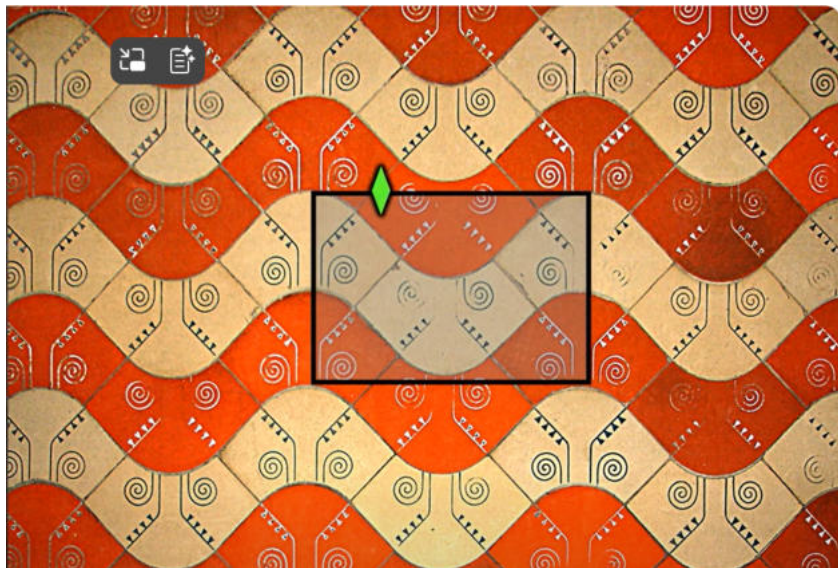
Esempio



Esempio



Esempio



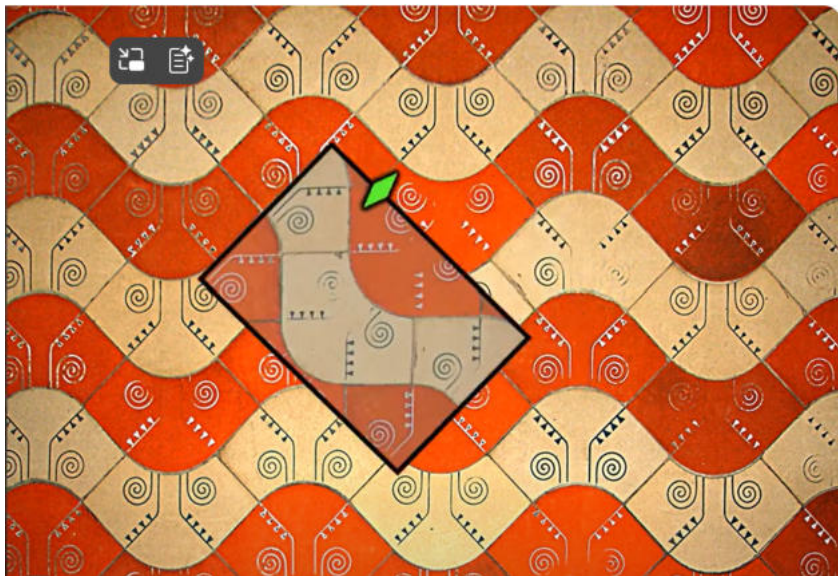
Esempio



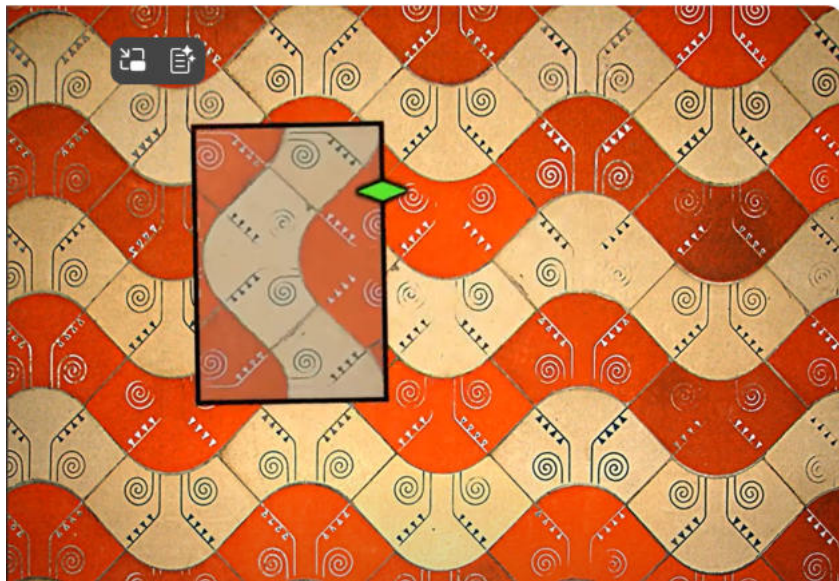
Esempio



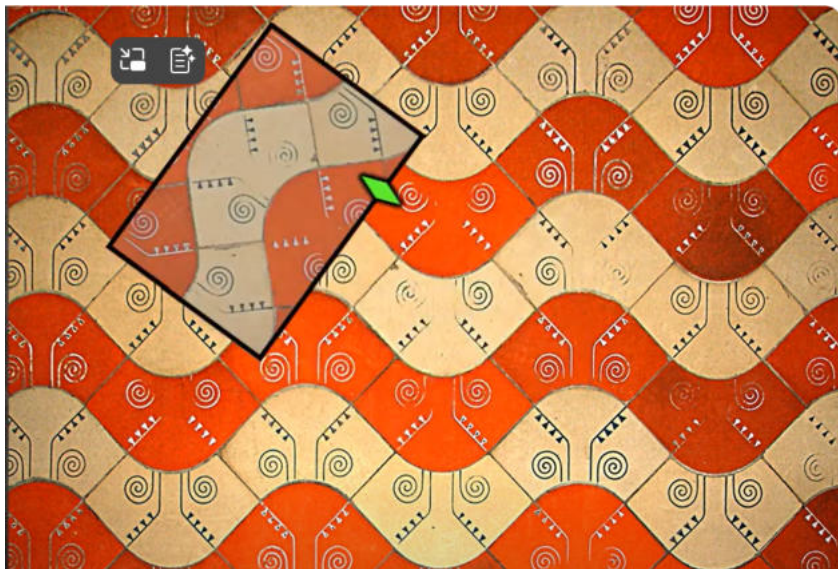
Esempio



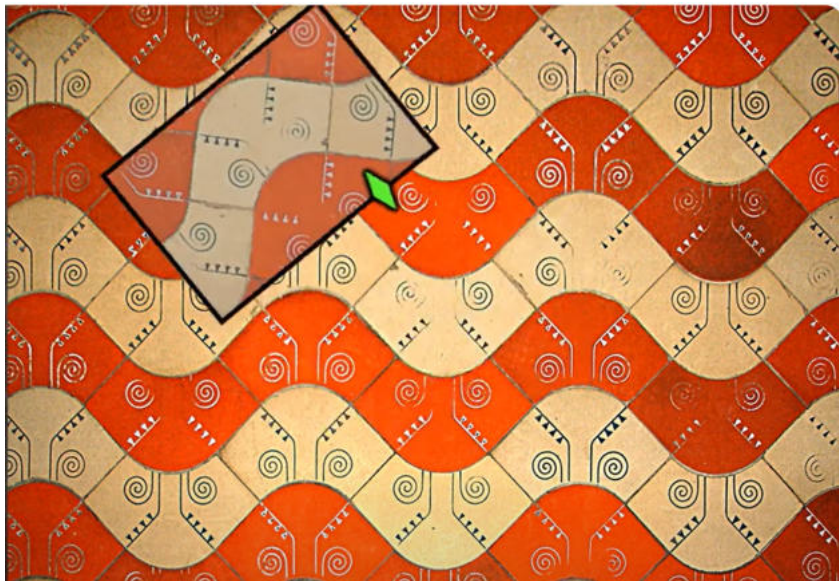
Esempio



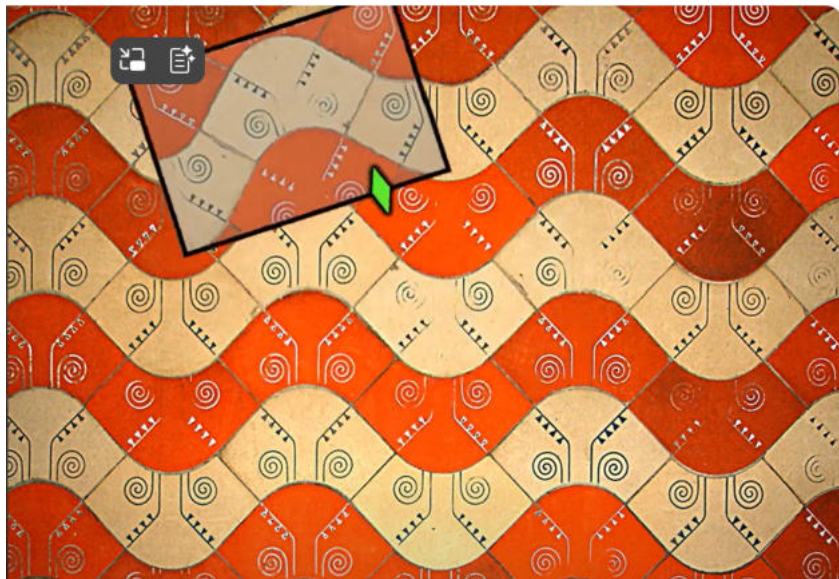
Esempio



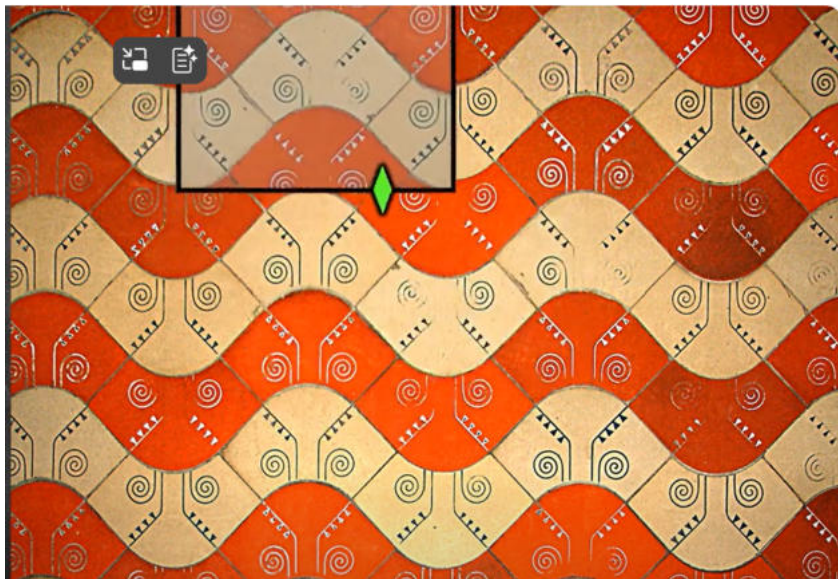
Esempio



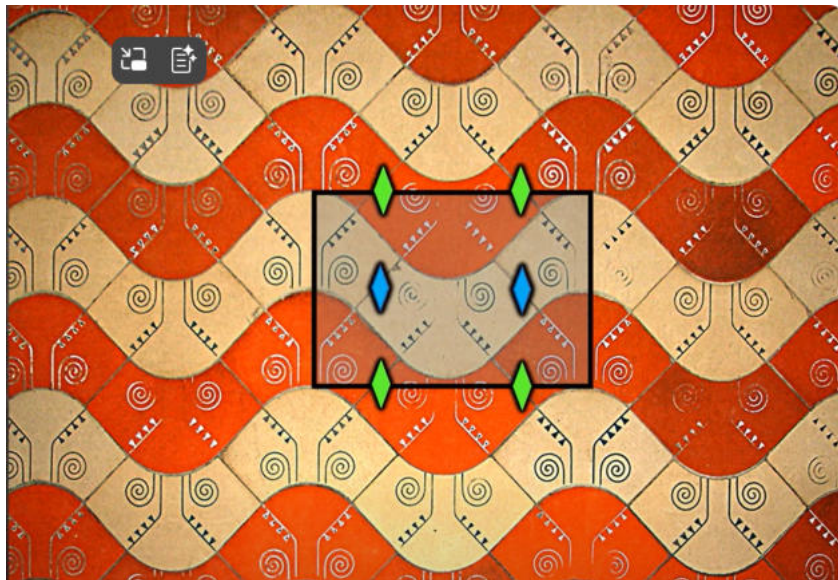
Esempio



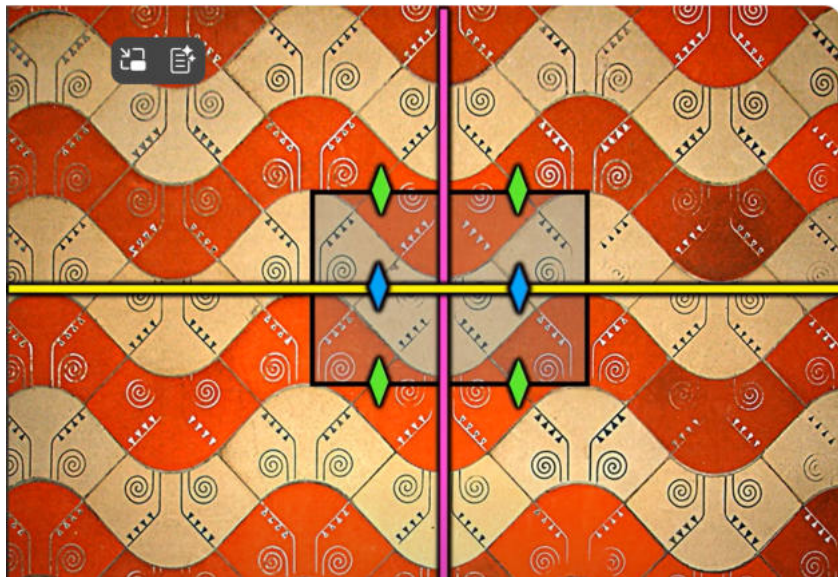
Esempio



Esempio



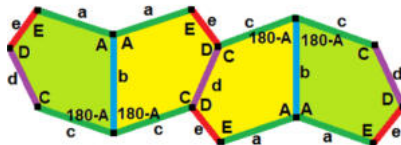
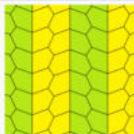
Esempio



Esempio

pmg (22*)

p2 (2222)



$$a = c$$

$$A + B = 180^\circ$$

$$C + D + E = 360^\circ$$

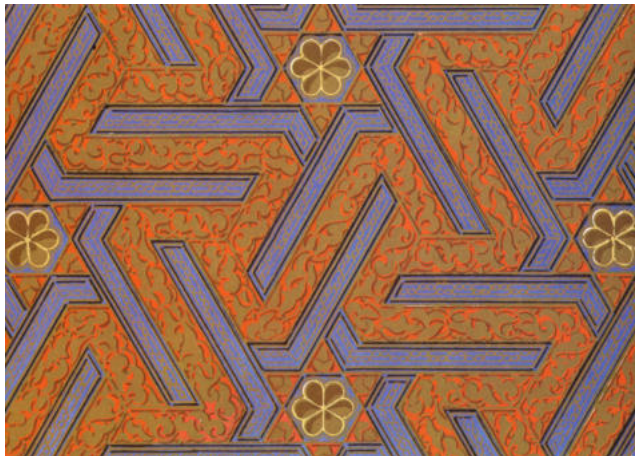
Esempio



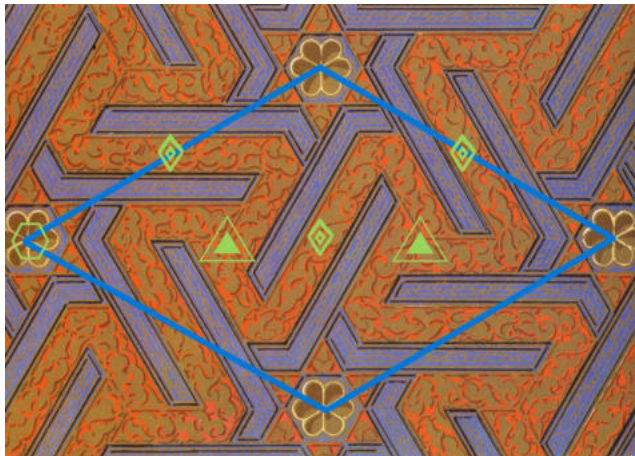
Esempio



Esempio



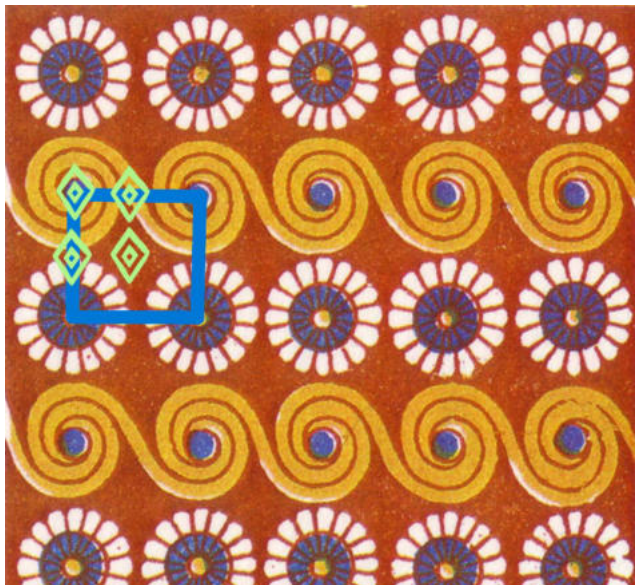
Esempio



Esempio



Esempio



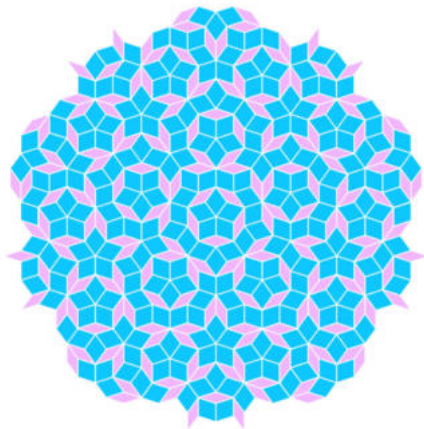
Si partì da 20.000...

- Nel 1961, il logico H. Wang ipotizzò che se un insieme di forme può tassellare il piano, allora deve anche poterlo fare in modo periodico. Solo pochi anni dopo, il suo dottorando R. Berger gli diede torto, scoprendo un enorme insieme di oltre 20.000 tessere che riescono a tassellare il piano, ma solo in modo non periodico. Questi insiemi di tessere sono detti aperiodici.

Si partì da 20.000...

- Nel 1961, il logico H. Wang ipotizzò che se un insieme di forme può tassellare il piano, allora deve anche poterlo fare in modo periodico. Solo pochi anni dopo, il suo dottorando R. Berger gli diede torto, scoprendo un enorme insieme di oltre 20.000 tessere che riescono a tassellare il piano, ma solo in modo non periodico. Questi insiemi di tessere sono detti aperiodici.
- Sebbene R. Berger e altri siano riusciti a ridurre significativamente la dimensione di questi insiemi aperiodici, a metà degli anni '70 R. Penrose catturò l'attenzione del mondo scoprendo piccoli insiemi di tessere aperiodiche di sua invenzione. Gli insiemi più piccoli richiedono solo due tessere.

...e si arrivò a 2



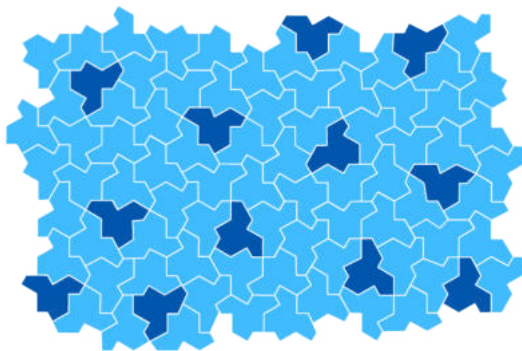
La tessera Socolar-Taylor

Esiste una singola tessera aperiodica? L'“einstein” — chiamata così non in onore del fisico, ma dal tedesco ein Stein, ovvero “una pietra”. Nel 2010, J. Socolar e J. Taylor si avvicinarono molto alla scoperta di un einstein.



L'einstein

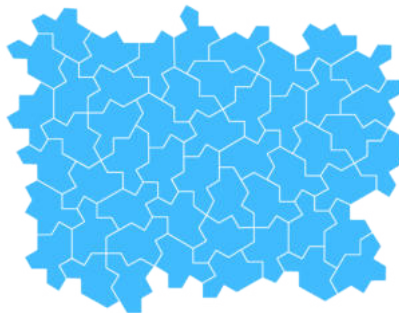
Nel marzo 2023, il dilettante David Smith scoprì un'intera famiglia infinita di questi einsteins. Coinvolse C. Kaplan, C. Goodman-Strauss e J. S. Myers — esperti in informatica, matematica.



La monotassellazione aperiodica a 13 lati detta "cappello". I cappelli blu scuro sono versioni specchiate di quelli blu chiaro.

Ancora un margine di miglioramento

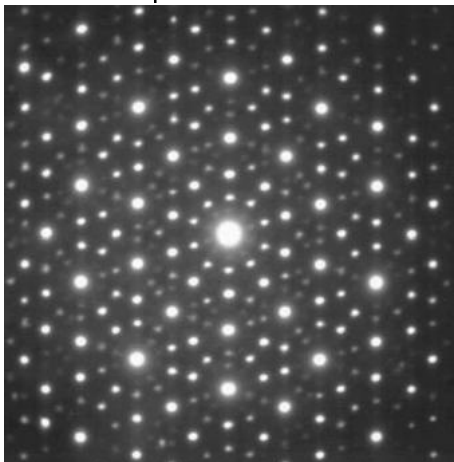
Se voleste piastrellare il bagno con tale tessera dovrebbe acquistare due versioni: quella standard e la sua immagine specchiata.



Smith poi trovò, in quella famiglia infinita di monotessere aperiodiche, una che chiamò “spettro”, capace di tassellare il piano senza richiedere copie specchiate.

Cristallografia

Nel 1982, il fisico D. Shechtman osservò che una lega alluminio-manganese mostrava diffrazione con simmetria icosaedrica, ciò gli valse il Premio Nobel per la Chimica nel 2011.



Riferimenti

- Wikipedia
- David S. Richeson, A Brief History of Tricky Mathematical Tiling, Quanta magazine, 30 ottobre 2023
- Natalie Wolchover, Pentagon Tiling Proof Solves Century-Old Math Problem, Quanta magazine, 11 luglio 2017
- Natalie Wolchover, Marjorie Rice's Secret Pentagons, Quanta magazine, 11 luglio 2017
- Martin Gardner, Time Travel and Other Mathematical Bewilderments, 1988, pp. 163 – 176
- Doris Schattschneider, Tiling the Plane with Congruent Pentagons, in Mathematics Magazine