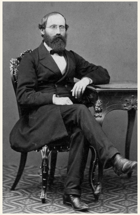
Per favore non cancellare: dialoghi matematici

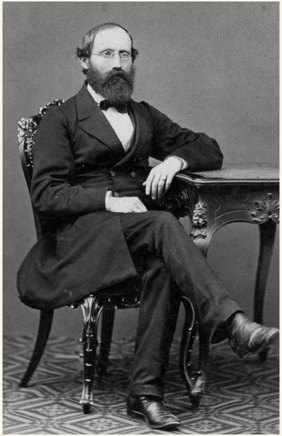
Bernhard Riemann: a duecento anni dalla nascita



Alberto Cogliati

Università degli Studi di Padova | Dipartimento Matematica

Bernhard Riemann (1826–1866)



- Nasce a Breselenz il 17 settembre 1826.
- Studia a Göttingen e Berlino dove tra gli altri segue corsi di Gauss, Stern, Jacobi, Eisenstein e Dirchlet.
- Nell'arco di pochi anni scrive tre lavori fondamentali: *Inauguraldissertation* (1851), *Habilitationsschrift*, (1853), *Habilitationsvortrag* (1854).
- Nel 1859, a seguito della morte di Dirichlet, assume il ruolo di professore ordinario a Göttingen.
- Numerosi e prolungati soggiorni in Italia, dove stringe amicizia con Enrico Betti.
- Muore in Italia, sulle sponde del Lago Maggiore nell'estate del 1866.

Una citazione di Felix Klein, 1895

La vita esteriore di Riemann può forse suscitare simpatia, ma fu troppo priva di avvenimenti per destare un interesse particolare. Riemann apparteneva infatti a quella schiera di studiosi riservati che lasciano maturare lentamente i propri pensieri profondi nel silenzio del loro studio.
Aveva venticinque anni quando, nel 1851, conseguì il dottorato a Göttingen, presentando una dissertazione che rivelava una straordinaria potenza intellettuale. Trascorsero altri tre anni prima che ottenesse la libera docenza nella stessa università. Fu allora che iniziarono ad apparire, in rapida successione, tutte quelle importanti ricerche delle quali desidero parlare.
Alla morte di Dirichlet, nel 1859, Riemann ne divenne il successore all'Università di Göttingen. Ma già nel 1863 contrasse la malattia fatale alla quale soccombette nel 1866, alla prematura età di quarant'anni.

Il giovane Riemann

Lettera al padre, febbraio 1845

La vocazione matematica

Sento sempre più inclinazione e passione per la matematica; anche Schmalfuß sembra essere dell'opinione che io dovrei studiare matematica.

L'interesse per la teologia

Naturalmente, [. . .] a Göttingen mi farei immatricolare come studente di teologia; tuttavia devo pur essere deciso io stesso su ciò che propriamente dovrò intraprendere laggiù, poiché altrimenti non potrò giungere a nulla di veramente serio in nessuna disciplina.

Il giovane Riemann

Lettera al padre, febbraio 1845

Se dunque, sotto qualche aspetto, ti fosse più gradito che io restassi nel campo della teologia, allora rinuncerò completamente alla matematica e mi dedicherò maggiormente allo studio delle lingue; inoltre, bisogna considerare anche le maggiori spese legate alla matematica, poiché in questo campo dovrei probabilmente studiare più a lungo per un semestre e, come teologo, potrei forse già prima guadagnare qualcosa, almeno come precettore privato.

Göttingen, novembre 1846

Riguardo ai corsi che seguo, non ho ancora le idee del tutto chiare, in parte perché molti di quelli che vorrei frequentare si sovrappongono.

Tra i corsi scelti compaiono:

- Un corso di Stern sugli *integrali definiti*;
- Un corso di Gauss su *La teoria dei minimi quadrati*;
- Corsi vari di storia naturale, teologia e cultura classica.

Gli anni a Berlino

Lettera al padre, luglio 1847

La scelta dei miei corsi qui mi è stata piuttosto difficile, poiché avrei voluto continuare a seguire molti di quelli ai quali avevo assistito come uditore, se il mio tempo e le mie finanze non me lo avessero impedito. In alcuni giorni della settimana dovevo stare fuori di casa dalle 9 alle 4 e poi ancora dalle 6 alle 8; infatti, oltre ai corsi che avevo già scelto a Quickborn, insieme ad altri cinque studenti seguivo anche un *Privatissimum* con Eisenstein, che nel corso di questo semestre si è abilitato qui come libero docente, sulle funzioni ellittiche. Egli teneva lezione tre volte alla settimana dalle 9 alle 11 e, poiché dovevo percorrere una distanza piuttosto lunga, circa 35 minuti fino a casa sua, ciò mi occupava quasi tre ore.

L'incontro con Dirichlet

Lettera al padre, luglio 1847

Il mio corso specialistico è quello con Dirichlet; egli tiene lezioni proprio in quel settore della matematica al quale Gauss deve tutta la sua fama. Mi sono dedicato con grande impegno a questo argomento e, come spero, non senza successo.

Gli anni Berlino

Figura: I moti rivoluzionari a Berlino 1848-1849

Gli anni a Berlino

Moti rivoluzionari e lezioni

Quando sono giunto qui, mi sono trovato difronte le baionette: il marciapiede della stazione era occupato dai soldati e un sottufficiale passava da uno scompartimento all'altro per chiedere i documenti; chi non poteva identificarsi in modo sufficiente veniva condotto alla prefettura di polizia. Io però fui lasciato passare mostrando la mia tessera universitaria.
Già a Ludwigslust ho ricevuto la notizia che il mio alloggio non era stato affittato e così ho potuto felicemente rientrare nella mia vecchia stanza.
Per i corsi di Dirichlet e Jacobi sono arrivato proprio in un momento molto favorevole...

Lettera al padre, marzo 1849

Studente a Berlino

Jacobi aveva appena iniziato una nuova parte del suo corso, nella quale esponeva ancora una volta l'intero sistema della teoria delle funzioni ellittiche in modo estremamente chiaro e semplice; potei quindi inserirmi facilmente nel filo delle lezioni e, nelle ultime quattro settimane, sono stato da lui con grande regolarità. Purtroppo non sono ancora riuscito a procurarmi un quaderno degli appunti, ma ho ottenuto la promessa che lo riceverò nel prossimo semestre. Dirichlet mi ha procurato l'accesso anche alla biblioteca, senza che venissero sollevate difficoltà, come invece temevo. Di solito andavo la mattina alle nove nella sala di lettura per leggere due memorie di Gauss che non era possibile trovare altrove. Un altro lavoro di Gauss, che aveva ottenuto il premio a Copenaghen, l'ho cercato a lungo invano nei cataloghi della Biblioteca Reale, e finalmente l'ho ottenuto grazie al dottor Galle dell'osservatorio; lo sto ancora studiando.

Lettera al padre, marzo 1849

La dissertazione dottorale, 1851

I.

Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse.

(Inauguraldissertation, Göttingen, 1851.)

1.

Denkt man sich unter z eine veränderliche Grösse, welche nach und nach alle möglichen reellen Werthe annehmen kann, so wird, wenn jedem ihrer Werthe ein einziger Werth der unbestimmten Grösse w entspricht, w eine Function von z genannt, und wenn, während z alle zwischen zwei festen Werthen gelegenen Werthe stetig durchläuft, w ebenfalls stetig sich ändert, so heisst diese Function innerhalb dieses Intervalls stetig oder continuirlich. ([1])

Diese Definition setzt offenbar zwischen den einzelnen Werthen der Function durchaus kein Gesetz fest, indem, wenn über diese Function für ein bestimmtes Intervall verfügt ist, die Art ihrer Fortsetzung ausserhalb desselben ganz der Willkür überlassen bleibt.

La dissertazione dottorale, 1851

Il racconto di Dedekind

Questa dissertazione di dottorato ricevette un giudizio molto favorevole da parte di Gauss, il quale comunicò a Riemann, nel corso del colloquio d'esame, che egli stesso stava preparando da diversi anni una memoria riguardante il medesimo argomento, ma trattato in una forma più ampia e generale.
L'esame ebbe luogo mercoledì 3 dicembre, mentre la disputa pubblica e la cerimonia di conferimento del titolo di dottore si svolsero martedì 16 dicembre.

Lettera al padre

Ora che ho terminato la mia dissertazione, credo che le mie prospettive siano considerevolmente migliorate. Spero inoltre che col tempo imparerò a scrivere con maggiore scioltezza e più rapidamente, soprattutto se cercherò di frequentare più persone nella vita sociale e se avrò finalmente occasione di tenere lezioni; adesso sono di ottimo umore.

Il ruolo di Dirichlet

Lettera di Riemann al padre, autunno 1852

"L'altra mattina Dirichlet è stato da me per circa due ore; mi ha portato alcuni appunti di cui avevo bisogno per la mia tesi di abilitazione, così completi che alleggeriranno considerevolmente il mio lavoro; altrimenti avrei forse dovuto passare molto tempo in biblioteca a cercare ogni sorta di cose. Ha inoltre esaminato con me la mia dissertazione e, in generale, si è mostrato estremamente cordiale nei miei confronti, cosa che mi aspettavo appena, data la grande differenza di posizione tra noi. Nutro la speranza che non si dimenticherà di me in seguito." [...]
"Vedi dunque che non ho trascorso tutto il tempo chiuso in casa; e tuttavia lavoro con grande impegno durante la mattina e mi accorgo di fare progressi migliori di quanti ne avrei fatti passando l'intera giornata sui libri."

Bernhard Riemann: *Habilitationsschrift* 1853

XII.

Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.

(Aus dem dreizehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.)*)

Der folgende Aufsatz über die trigonometrischen Reihen besteht aus zwei wesentlich verschiedenen Theilen. Der erste Theil enthält eine Geschichte der Untersuchungen und Ansichten über die willkürlichen (graphisch gegebenen) Functionen und ihre Darstellbarkeit durch trigonometrische Reihen. Bei ihrer Zusammenstellung war es mir vergönnt, einige Winke des berühmten Mathematikers zu benutzen, welchem man die erste gründliche Arbeit über diesen Gegenstand verdankt. Im zweiten Theile liefere ich über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe eine Untersuchung, welche auch die bis jetzt noch unerledigten Fälle umfasst. Es war nöthig, ihr einen kurzen Aufsatz über den Begriff eines bestimmten Integrales und den Umfang seiner Gültigkeit voraufzuschicken.

Figura: Dalle *Riemann's Gesammelte Werke*, 1876, p. 213

Bernhard Riemann: *Habilitationsschrift* 1853

"Il presente saggio sulle serie trigonometriche consiste di due parti essenzialmente distinte. La prima parte contiene una storia delle ricerche e delle opinioni intorno alle funzioni arbitrarie (date graficamente) e la loro rappresentazione attraverso serie trigonometriche. Nella sua composizione sono stato guidato da alcuni suggerimenti del celebre matematico al quale si deve il primo fondamentale lavoro sull'argomento. Nella seconda parte, fornisco una trattazione intorno alla rappresentazione di una funzione attraverso una serie trigonometrica che include casi che finora sono rimasti esclusi. A tal fine, si è reso necessario premettere a questa trattazione un breve saggio sul concetto di integrale definito e sull'ambito della sua validità."

Dirichlet 1829

Data una funzione f periodica, di periodo 2π, tale che:
I) f è integrabile (*welche durchgehends eine Integration zulläst*);
II) f ha al più un numero finito di massimi e di minimi;
III) nei suoi punti di discontinuità assume il valore $f(x) = 1/2\,(f(x+0) + f(x-0))$;
allora f è rappresentabile in serie di Fourier.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\,,$$

dove i coefficienti sono dati da $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$, e da:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \qquad n \geq 1, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, \qquad n \geq 1.$$

Bernhard Riemann: *Habilitationsschrift* 1853

224 XII. Ueber die Darstellbarkeit einer Function

Erstlich steht, wie Dirichlet selbst am Schlusse seiner Abhandlung bemerkt, dieser Gegenstand mit den Principien der Infinitesimalrechnung in der engsten Verbindung und kann dazu dienen, diese Principien zu grösserer Klarheit und Bestimmtheit zu bringen. In dieser Beziehung hat die Behandlung desselben ein unuittelbares Interesse.

Zweitens aber ist die Anwendbarkeit der Fourier'schen Reihen nicht auf physikalische Untersuchungen beschränkt; sie ist jetzt auch in einem Gebiete der reinen Mathematik, der Zahlentheorie, mit Erfolg angewandt, und hier scheinen gerade diejenigen Functionen, deren Darstellbarkeit durch eine trigonometrische Reihe Dirichlet nicht untersucht hat, von Wichtigkeit zu sein.

Figura: Dalle *Riemann's Gesammelte Werke*, 1876, p. 224

Qual è il significato da attribuire a $\int_a^b f(x)dx$?

> 4.
>
> Die Unbestimmtheit, welche noch in einigen Fundamentalpunkten der Lehre von den bestimmten Integralen herrscht, nöthigt uns, Einiges voraufzuschicken über den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

Consideriamo una successione di valori $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ compresi fra $x_0 := a$ e $x_n := b$. Poniamo $\delta_1 := x_1 - a, \delta_2 = x_2 - x_1, \ldots, \delta_n := b - x_{n-1}$. Siano ϵ_i, $i = 1, \ldots, n$ numeri razionali positivi minori di 1. La somma S dipende oltre che dalla scelta della partizione, dagli ϵ_i, $i = 1, \ldots, n$:

$$S(\delta, \epsilon) = \sum_{k=1}^{n} \delta_k f(x_{k-1} + \epsilon_k \delta_k).$$

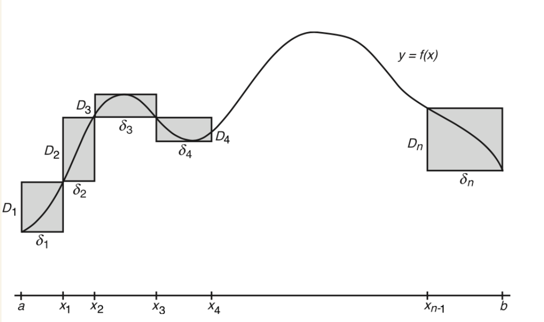
La definizione

Se S gode della proprietà che, comunque scelti δ_k, ϵ_k, $k = 1, \ldots, n$, essa tende a un limite A, allora f è integrabile e si scriverà $\int_a^b f(x)dx := A$.

Il primo criterio

Denotando con D_k l'oscillazione della funzione f fra x_k e x_{k-1}, occorre e basta che

$$R(\delta) := \sum_{k=1}^{n} \delta_k D_k \to 0, \quad \delta \to 0.$$



Bernhard Riemann: *Habilitationsschrift* 1853

Il secondo criterio

"Se la funzione $f(x)$ è sempre finita e, diminuendo indefinitamente e simultaneamente tutti i δ, la lunghezza totale s degli intervalli nei quali l'oscillazione della funzione è maggiore di un numero dato σ diventa infinitamente piccola, allora la somma S converge quando i δ diventano simultaneamente infinitamente piccoli."

Una traduzione nel linguaggio $\epsilon - \delta$

Sia f una funzione limitata su $[a, b]$. Questa funzione è integrabile se e solo se per ogni coppia di numeri positivi (ν, σ) esiste un δ tale che per ogni partizione di $[a, b]$ con sottointervalli di lunghezza minore di δ, cioè tali che $|x_k - x_{k+1}| < \delta, k = 0, \ldots, n-1$, i sottointervalli nei quali l'oscillazione di f è $\geq \sigma$ hanno lunghezza totale $< \nu$.

Notazioni: denotiamo con $\|\delta\| := \sup\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ (la norma della partizione P) e con $\Delta(d) := \sup_{\|\delta\| \le d} R(\delta)$. Inoltre sia $s(P, \sigma) = \sum' \delta_k$, dove il simbolo ' indica che la somma deve essere eseguita su quei sottointervalli per i quali la oscillazione di f è maggiore di σ. Si avrà $\sigma \cdot s(P, \sigma) \le R(P) \le \Delta(d)$. Dal che si ricava:

$$s(P, \sigma) \le \frac{\Delta(d)}{\sigma}.$$

Cioè: "la lunghezza totale degli intervalli in cui l'oscillazione è $> \sigma$, qualunque sia σ, può essere resa piccola a piacere per una opportuna scelta di d."

La condizione è anche sufficiente. Supponiamo infatti che $s(\sigma, P) \longrightarrow 0$, per ogni $\sigma > 0$ e per $d \longrightarrow 0$. Avremo:

$$R(P) = \sum_k \delta_k D_k = \sum_{k \mid D_k > \sigma} \delta_k D_k + \sum_{k \mid D_k \le \sigma} \delta_k D_k \le D \cdot s(\sigma) + (b - a) \cdot \sigma$$

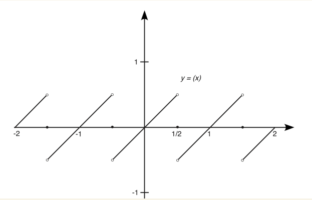
Poiché la precedente disuguaglianza vale per qualunque valore arbitrario di σ, possiamo scegliere σ piccolo a piacere. Inoltre sappiamo per ipotesi che per $d \longrightarrow 0$ $s(\sigma) \longrightarrow 0$. Cioè $R(P) \longrightarrow 0$, cioè f è integrabile su $[a, b]$.

Bernhard Riemann: *Habilitationsschrift* 1853

Un esempio di funzione che ha infiniti punti di discontinuità e che tuttavia è integrabile fu fornito per la prima volta proprio nell'*Habilitationsschrift*. L'esempio è il seguente:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(kx)}{k^2},$$

dove la funzione $x \mapsto (x)$ è definita come $(x) := x - n(x)$, dove $n(x)$ è l'intero più vicino a x. Se $x = \pm\dfrac{2p+1}{2}$, si intende che $(x) = 0$.



Bernhard Riemann: *Habilitationsschrift* 1853

La funzione $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(kx)}{k^2}$, è discontinua in $x = \frac{a}{2b}$, con a, b interi, coprimi, a dispari.

Il salto in corrispondenza di questa discontinuità è $\frac{\pi^2}{8b^2}$. Consideriamo la funzione nell'intervallo $[0, 1]$; c'è solo un numero finito di punti razionali per i quali la oscillazione è maggiore di σ. Infatti da $\frac{\pi^2}{8b^2} > \sigma$ si ricava $b < \frac{\pi}{\sqrt{8\sigma}}$. Se N è il numero di tali punti basta scegliere δ in maniera che $N\delta < \nu$. In tal caso il criterio garantisce l'integrabilità.

Bernhard Riemann: *Habilitationsvortrag*, giugno 1854

Riemann propose tre opzioni per l'argomento da svolgere per la "lezione inaugurale".

- La storia della questione della rappresentabilità di una funzione in serie trigonometrica;
- Le soluzioni di due equazioni quadratiche in due incognite;
- Le ipotesi che stanno alla base della geometria.

La scelta della facoltà, e di Gauss in particolare, non sembra sia stata particolarmente gradita a Riemann.

Lettera al fratello Wilhelm, dicembre 1853

Al momento, questa è la situazione del mio lavoro: all'inizio di dicembre ho presentato la mia *Habilitationsschrift* e con essa ho dovuto indicare tre argomenti per la lezione inaugurale, perché la facoltà ne scelga uno tra questi. Avevo completato i primi due e speravo che scegliessero uno fra questi; ma Gauss ha deciso per il terzo così oggi mi trovo in difficoltà, poiché devo ancora lavorare su quella questione.

Bernhard Riemann: *Habilitationsvortrag*, giugno 1854

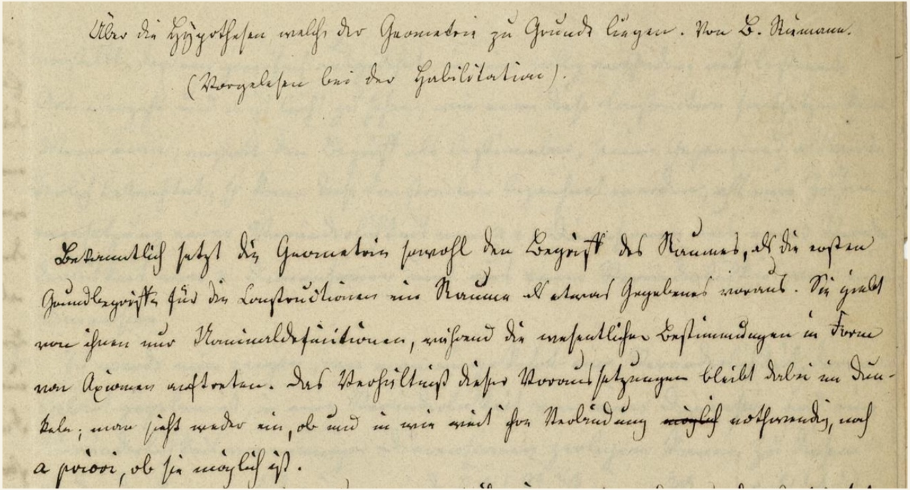


Figura: Un particolare del manoscritto di Riemann, Cod. Ms. B. Riemann 16 Cim., Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen.

Bernhard Riemann: *Habilitationsvortrag*, giugno 1854

XIII.

Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

(Aus dem dreizehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.*))

Plan der Untersuchung.

Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des Raumes, als die ersten Grundbegriffe für die Constructionen im Raume als etwas Gegebenes voraus. Sie giebt von ihnen nur Nominaldefinitionen, während die wesentlichen Bestimmungen in Form von Axiomen auftreten. Das Verhältniss dieser Voraussetzungen bleibt dabei im Dunkeln; man sieht weder ein, ob und in wie weit ihre Verbindung nothwendig, noch a priori, ob sie möglich ist.

Figura: Dalle *Riemann's Gesammelte Werke*, 1876, p. 254

Habilitationsvortrag: alcuni passi significativi

È noto che la geometria presuppone come dati sia il concetto di spazio, sia i primi concetti fondamentali necessari per le costruzioni nello spazio. Di essi fornisce soltanto definizioni nominali, mentre le determinazioni essenziali compaiono nella forma di assiomi.
La relazione tra tali presupposti rimane pertanto oscura: non è chiaro né se la loro connessione sia necessaria e in quale misura, né se essa sia possibile *a priori*. Dai tempi di Euclide fino a Legendre – per ricordare il più celebre tra i moderni fondatori della geometria – questa oscurità non è stata dissipata, né dai matematici né dai filosofi.
La ragione di ciò risiede probabilmente nel fatto che non è mai stato elaborato in modo adeguato il concetto generale di grandezza pluriestesa, entro il quale rientrano anche le grandezze spaziali.

La proprietà comune di queste varietà, la cui misura di curvatura è costante, può essere espressa anche dicendo che le figure tracciate su di esse possono essere mosse senza deformarsi. È infatti evidente che una figura non potrebbe essere traslata o ruotata senza alterazioni se la misura di curvatura non fosse la stessa in ogni punto e in ogni direzione.
D'altra parte, le relazioni metriche della varietà risultano completamente determinate dalla misura di curvatura; ne consegue che tali relazioni sono identiche in ogni punto e che, pertanto, a partire da ciascun punto possono essere eseguite le medesime costruzioni [...].
Le relazioni metriche di queste varietà dipendono dunque unicamente dal valore della misura di curvatura. Dal punto di vista analitico, se si denota tale valore con α, l'espressione dell'elemento lineare può essere scritta nella forma

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\sum x^2}\cdot\sqrt{\sum (dx)^2}.$$

Frammenti sulla teoria della conoscenza

La scienza naturale è il tentativo di comprendere la natura mediante concetti precisi. In base ai concetti con i quali comprendiamo la natura, non soltanto le percezioni vengono integrate in ogni istante, ma vengono anticipatamente determinate come necessarie, o, quando il sistema concettuale non è pienamente sufficiente, come probabili, anche le percezioni future; si determina, in base a essi, che cos'è "possibile" (perciò anche che cos'è "necessario", ovvero ciò di cui è impossibile il contrario), e si può determinare matematicamente il grado di possibilità (di "probabilità") di ogni evento possibile in base ad essi, quando sono pienamente adeguati.

Frammenti sulla teoria della conoscenza

Se ciò che è necessario o possibile accade in conformità a questi concetti, essi vengono verificati, e su questa verifica dell'esperienza si basa la fiducia che noi riconosciamo loro. Se invece accade qualcosa che da essi non era previsto, cioè qualcosa di impossibile o improbabile in base ad essi, sorge il compito di integrarli o, se necessario, di rielaborarli, in modo tale che nell'ambito del sistema concettuale completato o migliorato ciò che è percepito cessi di essere impossibile o improbabile. Grazie a questo processo la nostra comprensione della natura diventa gradualmente sempre più completa e giusta, ma nello stesso tempo si spinge sempre più indietro, oltre la superficie dei fenomeni. La storia delle scienze naturali esplicative, almeno fino a dove noi possiamo risalire, mostra che questa in effetti è la via lungo la quale progredisce la conoscenza della natura. I sistemi concettuali che ora ne costituiscono il fondamento sono sorti dalla graduale trasformazione di precedenti sistemi concettuali, e le ragioni che spinsero ad elaborare nuovi meccanismi esplicativi vanno sempre individuate in contraddizioni o inverosimiglianze, sorte all'interno dei precedenti sistemi esplicativi.

"Prima il pensiero, poi i calcoli."

Dirichlet, *Gedächtnissrede auf Carl Gustav Jacob Jacobi*, 1852