

Soluzioni della Gara a Squadre del 6/3/26

Sam

In quanto organizzatore della Gara a Squadre di Milano, ho potuto vedere i testi la sera prima della gara - e ho potuto provare a farli.

Ad una prima lettura si notano subito alcuni problemi ragionevolmente semplici: 1, 2, 5, 6, 7; probabilmente veloci sia a livello di impostazione che a livello di calcoli.

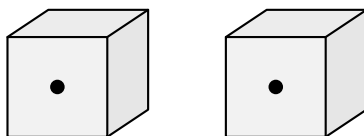
Ci sono poi problemi che chiaramente prevedono di trattare a mano liste di casi, tra tutti il 15 e il 16 - ma anche, ad un'occhiata più approfondita, il 13 e il 19. Anche l'11 può essere di questo tipo, forse.

Il 20 è il classico problema che ammicca alla teoria, mentre il 21 rimane misterioso, a una prima lettura. Il 18 sembra avere più simmetrie di quelle che poi ha e questo è pericoloso.

Riporto qui le mie soluzioni - non sono quelle ufficiali e spesso non sono le più rapide (ho corretto qualche errore di conto che avevo originariamente fatto, una volta viste le soluzioni). Ho cercato di spiegare come ho impostato i conti, quando mi è stato possibile, e come arrivare all'idea (se c'era un'idea), quando ne avevo una motivazione ragionevole. Alla fine risulta una gara con molti casi da macinare a mano in cui è essenziale saper organizzare bene il lavoro e mantenere l'ordine (penso di avere ricontato 8 volte quei maledetti messaggi dell'esercizio 19, solo perché ogni volta mi perdevi un pezzo).

1. L'affermazione "siamo tutti furfanti" non può essere vera, altrimenti chi la dice sarebbe un cavaliere, ma allora nemmeno l'affermazione "siamo tutti cavalieri" può essere vera. Dunque coloro che fanno tali affermazioni sono furfanti, ma, nel contempo, esiste almeno un cavaliere, che deve essere tra coloro che fanno la terza affermazione: "ci sono quattromila cavalieri", che dunque è vera. La risposta è 4000.

2. Non sappiamo come sono fatti i due dadi, ma sono uguali ed entrambi ci presentano la faccia con il numero 1.



Ora, vi sono 4 faccie confinanti con quella che mostra 1; tali faccie sono le stesse, nei due dadi, ma potrebbero essere ruotate diversamente. La probabilità che il secondo dado mostri la stessa faccia in alto del primo è allora $1/4$. La risposta è 2500.

N.B.: Vi starete chiedendo il perché del disegno; non lo so davvero, ma, almeno per me, la soluzione è stata ovvia non appena ho immaginato i due dadi e come fare per portarli nella stessa posizione (ovvero ruotare uno dei due attorno all'asse che passa per il pallino della faccia con 1).

3. Probabilmente ci sono metodi furbi per calcolare la somma richiesta, ma senza pensarci troppo potremmo partire subito a risolvere direttamente il quadrato magico. Ad esempio, dalla prima riga e dalla diagonale SW-NE si ha $1 + 11 + 16 = 12 + 7 + A$ cioè $A = 9$.

Poi, la somma dei numeri da 1 a 16 è $17 \cdot 8$ e dunque la somma su ogni riga (o colonna o diagonale) sarà $17 \cdot 2 = 34$. Quindi $B = 6$. La terza colonna, poi, dovrà rispettare $9 + 16 + x + 4 = 34$, ovvero $x = 5$; e allora, sulla terza riga avremo $y + 11 + 5 + 10 = 34$, da cui $y = 8$. Guardando poi la prima colonna avremo $12 + C + 8 + 1 = 34$ da cui $C = 13$. Sulla diagonale NW-SE abbiamo $12 + D + 5 + z = 34$ da cui $D + z = 17$; ma sulla seconda colonna e sull'ultima riga abbiamo

$$11 + D + 7 + w = 1 + w + 4 + 17 - D$$

da cui $2D = 4$, ovvero $D = 2$. Allora $E = 3$ (e $w = 14$, ma non ci importa). Quindi

$$A + B + C + D + E = 9 + 6 + 13 + 2 + 3 = 23.$$

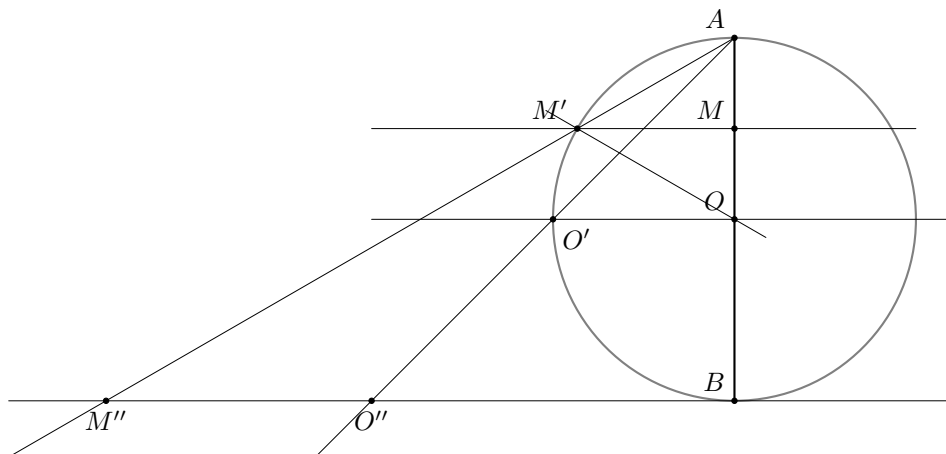
La risposta è 0023.

NB Potevamo essere più rapidi: se la somma di ogni riga e colonna e diagonale è 34, allora sulla prima riga abbiamo $19 + A + B = 34$ e sulla seconda $C + D + 16 + E = 34$, da cui

$$A + B + C + D + E = 2 \cdot 34 - 16 - 19 = 2.$$

Ma anche risolvere l'intero quadrato non richiedeva troppo tempo.

4. La figura è la seguente:



e c'è "Talete" scritto sopra ovunque. In particolare, $AB/AO = 2$, quindi $BO'' = 2OO' = 2r$ e $AO'' = 2AO' = 2r\sqrt{2}$. Inoltre, $MM' = \sqrt{OM'^2 - OM^2} = \sqrt{r^2 - r^2/4} = r\sqrt{3}/2$ e dunque, sempre per Talete, visto che $AB/AM = 4$, $BM'' = 2r\sqrt{3}$. Da ciò

$$M''O'' = BM'' - BO'' = 2r\sqrt{3} - 2r = 2r(\sqrt{3} - 1)$$

e

$$AO''/O''M = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{2} = \frac{1}{2} 1.4142 \cdot 2.7321 = 1.931 \dots$$

La risposta è 1931.

5. L'ipotesi del testo vuol dire che i centri delle 6 circonferenze stanno su una circonferenza Γ concentrica con la Maggiore, di raggio un metro di meno. Questi sei punti devono essere, tra loro, a distanza di almeno 2 metri (altrimenti si secano); questo vuol dire che in Γ una corda di 2 metri è vista, dal centro, sotto un angolo che è al più $\pi/3$ e dunque il raggio di Γ è almeno 2 metri. E' evidente che prendere Γ di raggio esattamente 2 metri e disporre i centri delle 6 sui vertici di un esagono regolare è una configurazione accettabile; dunque il raggio della Maggiore è almeno 3 metri. La risposta è quindi 0300.

6. Chiamiamo a e b i lati del rettangolo con $a \geq b$, allora il testo chiede che valga $a + b = 17$ e $a > 2b$. Scriviamo dunque le coppie valide:

$$16, 1 \quad 15, 2 \quad 14, 3 \quad 13, 4 \quad 12, 5$$

e basta, poiché se $a < 12$, $b \geq 6 = 12/2 > a/2$, che non è accettabile.

La risposta è 0005.

7. A parte la strana formulazione del testo, vogliamo il massimo valore di k tale che $117k$ sia un quadrato perfetto minore di $10000 = 100^2$. Si ha $117 = 3^2 \cdot 13$ e dunque $k = 13h^2$; inoltre, vogliamo $3 \cdot 13 \cdot h < 100$, ovvero $h < 3$. Ponendo $h = 2$, che è il massimo possibile consentito, otteniamo $k = 13h^2 = 13 \cdot 4 = 52$.

La risposta è 0052.

8. Innanzitutto, c'è $1/6$ di probabilità di vincere con un lancio, facendo esattamente 3.

Partendo a distanza al più 6 dal traguardo, anche sbagliando il tiro, si rimarrà comunque a distanza al più 6 dal traguardo. Quindi, comunque si sbagli il primo lancio (che succede con probabilità $5/6$), c'è $1/6$ di probabilità di vincere con il secondo lancio.

Infine, comunque si sbagliano i primi due lanci, che succede con probabilità $25/36$, c'è $1/6$ di probabilità di vincere con il terzo lancio. Quindi

$$\frac{1}{6} \left(1 + \frac{5}{6} + \frac{25}{36} \right) = \frac{36 + 30 + 25}{216} = \frac{91}{216} = 0.4212 \dots$$

La risposta è 4212.

9. La prima cosa che si nota è che non importa l'ordine delle mosse, quindi il guasto del robot non è importante: possiamo sempre supporre che tutte le mosse verso Sud siano alla fine del percorso.

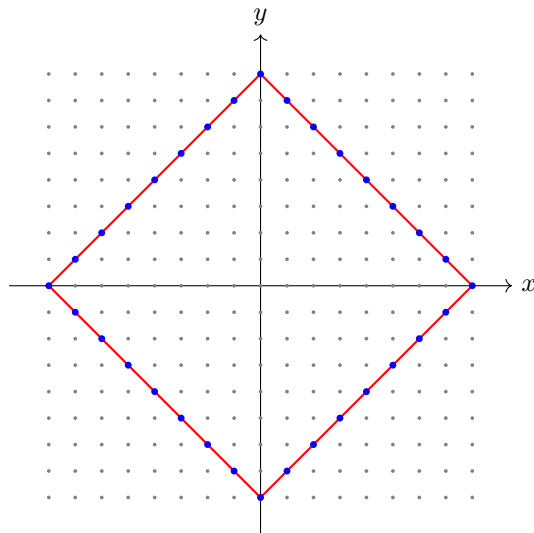
Per lo stesso motivo, un percorso che contenga una mossa a Nord e una a Sud porta allo stesso punto di un percorso con 2 mosse in meno, ottenuto eliminando quelle due. Lo stesso vale per una mossa a Est e una a Ovest. Ogni percorso di 8 passi si può ridurre a un percorso senza cancellazioni possibili, con lunghezza pari.

Utilizzando n mosse "senza cancellazioni" possiamo raggiungere $4n$ caselle.

Quindi possiamo raggiungere $4(8 + 6 + 4 + 2) = 4 \cdot 20 = 80$ caselle, oppure, con 0 mosse, stare fermi nell'origine. Dunque 81 caselle.

La risposta è 0081.

10. Il fatto che ogni cassetto contenga un numero di calzini di un dato colore minore della somma del numero di calzini di quello stesso colore negli altri due cassette ci dice che in ogni cassetto non ci possono essere più di 1012 calzini di un dato colore.



Fissato un cassetto che contiene x calzini rossi, y blu e z gialli, supponendo che $x \geq y \geq z$ (a meno di cambiare i colori), il numero massimo di calzini da pescare per essere sicuri di averne due di ogni colore è $x+y+2 \leq 1012+1012+2 = 2026$. Dunque, se dividiamo i tre colori mettendone 1012 in due cassette e 2 nel terzo di modo che ogni cassetto abbia 2026 calzini, avremo che a prescindere dal cassetto ci vorranno 2026 estrazioni per essere sicuri di avere 2 calzini per ogni colore.

La risposta è 2026

11. I numeri di al più 4 cifre la cui somma delle cifre è 1 sono 1, 10, 100, 1000.

La somma delle cifre di un numero di 4 cifre è al massimo 36, quindi se $N(N(n)) = 1$, allora $N(n) = 1$ o $N(n) = 10$. I numeri con 2 cifre che hanno $N(n) = 10$ sono 9 (se fisso la prima cifra, la seconda è obbligata); se aggiungiamo uno zero a destra di una delle cifre, otteniamo un numero di 3 cifre con la stessa somma delle cifre. Aggiungendo invece 2 zeri (possiamo farlo in tre modi) otteniamo numeri di 4 cifre con la stessa proprietà. Abbiamo così contato $6 \cdot 9 = 54$ numeri.

I numeri di tre cifre con tutte le cifre non nulle con $N(n) = 10$ corrispondono ai modi di scrivere 10 come somma di tre interi positivi, contando l'ordine, che è come scrivere 7 come somma di tre interi non negativi, contando l'ordine. Questo si fa in

$$\binom{7+2}{2} = 36 \text{ modi}.$$

Aggiungendo uno zero a destra di una delle cifre, otteniamo numeri di 4 cifre con uno zero e $N(n) = 10$. Così avremo $4 \cdot 36 = 144$ numeri.

Infine, i numeri di quattro cifre tutte non nulle con $N(n) = 10$, per lo stesso motivo di prima sono

$$\binom{6+3}{3} = 84.$$

Quindi $4 + 54 + 144 + 84 = 286$.

La risposta è 0286.

12. Intanto proviamoci: chiamiamo A, B, C, D i vertici di base (in ordine) e P la punta della piramide.

Dopo un minimo tentativo si trova subito un percorso del tipo $ABPADPCBCD$ dove abbiamo attraversato i seguenti segmenti

$$AB, BP, PA, AD, DP, PC, CB, BC, CD.$$

Avendo ripetuto un solo lato di base, l'unico modo di fare un percorso più breve sarebbe non ripetere alcun lato, ma questo è impossibile (ci sono 4 vertici da cui partono 3 spigoli e dunque non è possibile trovare un percorso euleriano). I lati di base sono lunghi 214 metri, come anche l'altezza della piramide; il lato obliquo si trova allora con un Pitagora ripetuto:

$$\sqrt{214^2 + 214^2/2} = 214\sqrt{\frac{3}{2}} = 107\sqrt{3}\sqrt{2} = 107 \cdot 1,7321 \cdot 1,4142 = 262,10 \dots$$

La lunghezza finale del percorso è $5 \cdot 214 + 4 \cdot 262,10 \dots = 2118,4 \dots$

La risposta è 2118.

N.B.: Abbiamo finto che il testo specificasse che ci si poteva muovere solo sugli spigoli; si può mostrare che, volendoli percorrere tutti, non è vantaggioso passare internamente alle faccie o addirittura nello spazio interno alla piramide, ma è lasciato come esercizio.

13. Riscriviamo il testo come

$$a + 3b = h^2 \quad 3a - b = k^2$$

allora è evidente che

$$4a + 2b = h^2 + k^2.$$

Vogliamo quindi trovare il massimo di $h^2 + k^2$ sotto 10000 di modo che valgano le due condizioni $a + 3b = h^2$ e $3a - b = k^2$. Ricavando a e b abbiamo

$$a = \frac{h^2 + 3k^2}{10} \quad b = \frac{3h^2 - k^2}{10}.$$

Ci serve quindi che h^2 e $3k^2$ finiscano con cifre che sommano a 10 (o a 0) e che $3h^2$ e k^2 finiscano con la stessa cifra. Le cifre con cui termina un quadrato sono 0, 1, 4, 9, 6, 5, mentre 3 volte un quadrato termina con 0, 3, 2, 7, 8, 5. Vediamo che le uniche possibilità per avere $h^2 + 3k^2$ divisibile per 10 sono che entrambi i quadrati finiscano per 0 o per 5. In tal caso, evidentemente anche $3k^2 - h^2$ è divisibile per 10. Dunque, possiamo scrivere $h = 5x$ e $k = 5y$; vogliamo quindi trovare il massimo valore di $x^2 + y^2$ di modo che

$$x^2 + y^2 < 400 \quad x, y \text{ con la stessa parità.}$$

I conti ora sono semplici: fissiamo x e troviamo il massimo y che rispetta la disuguaglianza e la condizione sulla parità:

$$\begin{aligned} x = 1, y = 19 &\Rightarrow x^2 + y^2 = 362 \\ x = 2, y = 18 &\Rightarrow x^2 + y^2 = 328 \\ x = 3, y = 19 &\Rightarrow x^2 + y^2 = 370 \\ x = 4, y = 18 &\Rightarrow x^2 + y^2 = 340 \\ x = 5, y = 19 &\Rightarrow x^2 + y^2 = 386 \\ x = 6, y = 18 &\Rightarrow x^2 + y^2 = 360 \\ x = 7, y = 17 &\Rightarrow x^2 + y^2 = 338 \\ x = 8, y = 18 &\Rightarrow x^2 + y^2 = 388 \\ x = 9, y = 17 &\Rightarrow x^2 + y^2 = 370 \\ x = 10, y = 16 &\Rightarrow x^2 + y^2 = 356 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = 11, y = 15 &\Rightarrow x^2 + y^2 = 346 \\ x = 12, y = 14 &\Rightarrow x^2 + y^2 = 340 \\ x = 13, y = 15 &\Rightarrow x^2 + y^2 = 394 \\ x = 14, y = 14 &\Rightarrow x^2 + y^2 = 392 \\ x = 15, y = 13 &\Rightarrow x^2 + y^2 = 394 \\ x = 16, y = 10 &\Rightarrow x^2 + y^2 = 356 \\ x = 17, y = 9 &\Rightarrow x^2 + y^2 = 370 \\ x = 18, y = 8 &\Rightarrow x^2 + y^2 = 388 \\ x = 19, y = 5 &\Rightarrow x^2 + y^2 = 386 \end{aligned}$$

e si vede che il massimo possibile è 394; dunque il massimo per $h^2 + k^2$ è $25 \cdot 394 = 9850$.

La risposta è 9850.

N.B.: L'equazione $h^2 \equiv -3k^2 \pmod{10}$ implica

$$\begin{cases} h^2 \equiv k^2 & \pmod{2} \\ h^2 \equiv 2k^2 & \pmod{5} \end{cases}$$

e la seconda equazione è impossibile, a meno che $h \equiv k \equiv 0 \pmod{5}$, mentre la prima implica $h \equiv k \pmod{2}$. Dunque, h, k sono multipli di 5 e della stessa parità. Questo ragionamento non è però granché più veloce del fare a mano i casi, come fatto sopra.

14. Chiamiamo $a \leq b \leq c$ le misure in gradi dei tre angoli; se uno divide gli altri due, deve essere chiaramente a che divide b e c , quindi scriviamo $b = ha$ e $c = ka$, con h, k interi.

Si avrà $a + ha + ka = 180$, ovvero $a(1 + h + k) = 180$, e notiamo che $1 + h + k \geq 3$.

Ora, due triangoli sono simili se e solo se hanno gli stessi angoli; avendoli ordinati, dovranno avere gli stessi a, b, c . Se dunque elenchiamo tutte le possibilità per a , avremo la lista richiesta. Equivalentemente possiamo elencare i valori ammissibili per $1 + h + k$ che sono i divisori di 180 maggiori o uguali a 3, cioè

$$3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180$$

Notiamo che, se $1 + h + k$ cambia, anche a cambia e dunque i triangoli non saranno simili perché l'angolo più piccolo non sarà uguale.

Ora vogliamo risolvere $1 + h + k = d$ con $h \leq k$; senza la disuguaglianza, le soluzioni intere positive sono $d - 2$. Contando come identiche le soluzioni (h, k) e (k, h) , otteniamo $\lceil (d - 2)/2 \rceil$. Ovvero

$$1, 1, 2, 2, 4, 4, 5, 7, 8, 9, 14, 17, 22, 29, 44, 89.$$

La somma fa 258, dunque la risposta è $\boxed{0258}$.

15. Qui sembra esserci poco da fare a parte elencare tutte le possibili configurazioni con un poco di ordine mentale. Vogliamo liste di sottoinsiemi di $\{1, 2, 3\}$ dove:

1. compaiano $\emptyset$ e $\{1, 2, 3\}$
2. se compaiono A e B , compare $A \cup B$
3. se compaiono A e B , compare $A \cap B$.

Se la lista contiene i 3 singoletti $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, allora contiene ogni sottoinsieme ed è

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}.$$

Se in una non compaiono singoletti, sarà della forma

$$\emptyset, \{a, b\}, \{a, b, c\}$$

(ce ne sono 3 di questa forma, dovendo scegliere chi è c), oppure

$$\emptyset, \{a, b, c\}.$$

Se compare un solo singoletto, sarà:

- della forma

$$\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}$$

e ne troviamo 6 di questa forma: scegliamo chi è a e poi chi è b tra i restanti, oppure

- della forma

$$\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}$$

e ne troviamo 3 di questa forma: è determinata se scegliamo a ;

- della forma

$$\emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}$$

e ne troviamo 3 di questa forma, scegliendo a ;

- della forma

$$\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

e ne troviamo ancora 3 di questa forma, scegliendo a .

Infine, può contenere due singoletti e allora sarà in una delle due forme

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}$$

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}$$

e avremo 3 scelte per la prima forma e 6 per la seconda.

In totale $1 + 4 + 15 + 9 = 29$ possibilità.

La risposta è $\boxed{0029}$.

N.B.: L'esercizio, ben noto nei corsi universitari, chiede di determinare tutte le possibili *topologie* su un insieme di 3 elementi. La consapevolezza di ciò non semplifica in alcun modo la risoluzione, se non suggerendo che la risposta possa trovarsi agevolmente in un libro o sul web.

16. Come e più del precedente, questo problema prevede come unica soluzione l'elencare, in modo più o meno furbo, tutti i casi.

I numeri primi della forma $x1$ sono tutti automaticamente rilevanti: si scrivono in uno e un solo modo come somma di un numero primo (loro stessi). Quindi 11, 31, 41, 61, 71.

Nessun numero della forma $x9$ è rilevante: sommando i primi 9 primi dispari (usando il 2 otterrei un risultato pari) ottengo

$$3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 = 127.$$

Se voglio un primo rilevante della forma $x7$, allora deve essere almeno $3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 = 75$. L'unico primo che finisce per 7 più grande di 75 è 97.

Notiamo, per tentativi, che le seguenti somme danno 97:

$$3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 41$$

$$3 + 5 + 7 + 13 + 17 + 23 + 29$$

$$\begin{aligned}
&3 + 5 + 11 + 13 + 17 + 19 + 29 \\
&3 + 5 + 7 + 11 + 17 + 23 + 31 \\
&3 + 5 + 7 + 11 + 19 + 23 + 29 .
\end{aligned}$$

D'altra parte, se togliessimo il 3, avremmo al minimo

$$5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 = 95$$

e ogni altri insieme di 7 primi non contenente il 3 sorpasserà questa somma di almeno $29 - 23 = 6$. Allo stesso modo, togliendo 5, avremo al minimo

$$3 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 = 93$$

e ogni altro insieme di 7 primi non contenente 5 sorpasserà questa somma di almeno $29 - 23 = 6$.

Ora, $3 + 5 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 = 109$, quindi i primi 4 primi possono essere 3, 5, 7, 11 o 3, 5, 7, 13 o 3, 5, 11, 13. Per tentativi, vediamo che quelle sopra sono le uniche combinazioni che funzionano. Dunque 97 è rilevante.

Se voglio poi un primo rilevante della forma $x3$, devo cercare tra 23, 43, 53, 73, 83.

Vediamo che 23 si ottiene solo come $3 + 7 + 13$ e $5 + 7 + 11$ (ogni altra terna dà risultati maggiori). Quindi è rilevante. Purtroppo, per tutti gli altri occorre trovare abbastanza realizzazioni come somme per capire che non sono rilevanti:

$$43 = 3 + 11 + 29 = 3 + 17 + 23 = 5 + 7 + 31 = 7 + 13 + 23 = 7 + 17 + 19$$

$$53 = 3 + 13 + 37 = 3 + 19 + 31 = 5 + 7 + 41 = 5 + 11 + 37 = 5 + 17 + 31 = 5 + 19 + 29$$

$$73 = 3 + 29 + 41 = 5 + 31 + 37 = 7 + 29 + 37 = 13 + 19 + 41 = 13 + 23 + 37 = 13 + 29 + 31 = 17 + 19 + 37 = 19 + 23 + 31$$

$$83 = 3 + 7 + 73 = 3 + 13 + 67 = 3 + 19 + 61 = 3 + 37 + 43 = 5 + 7 + 71 = 5 + 11 + 67 = 5 + 17 + 61 = 5 + 19 + 59 = 5 + 31 + 47 .$$

Quindi i numeri primi rilevanti sono 11, 31, 41, 61, 71, 97, 23 e la loro somma è 335.

La risposta è 0335.

17. La probabilità di vincere a Primo è $2/3$, mentre quella di vincere a Secondo è $1/3$.

Consideriamo le stringhe di lunghezza n della forma

$$V_1 P_2 \dots P_2 V_2, P_1 V_1 P_2 \dots P_2 V_2, \dots, P_1 \dots P_1 V_1 P_2 V_2, P_1 \dots P_1 V_1$$

dove P_j è perdere al gioco j e V_j è vincere al gioco j . La probabilità di una stringa con i primi k giocatori che persono al gioco 1, il $k + 1$ -esimo che vince al gioco 1 e successivi che perdono al gioco 2 fino all' n -esimo che vince al gioco 2 è

$$\frac{1}{3^k} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2^{n-k-2}}{3^{n-k-2}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2^{n-k-1}}{3^n} ,$$

con $0 \leq k \leq n - 2$.

C'è un altro caso in cui l' n -esimo giocatore vince, che è

$$P_1 \dots P_1 V_1$$

che ha probabilità $2/3^n$.

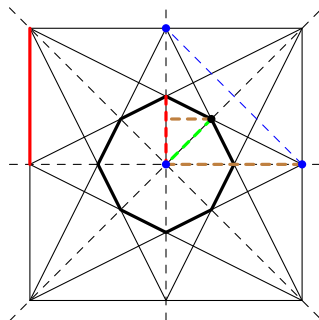
Sommandole tutte, otteniamo che la probabilità che l' n -esimo vinca è

$$\frac{1}{3^n} (2^{n-1} + \dots + 2 + 2) = \frac{2^n}{3^n}$$

Dunque il rapporto tra la probabilità di vittoria dell' n -esimo e del 90 -esimo è $2/3$.

La risposta è 0066.

18. Ovviamente l'ottagono centrale è simmetrico rispetto alle simmetrie del quadrato: riflessioni rispetto alle rette tratteggiate e rotazioni di 90° rispetto al centro. Dunque l'ottagono è equilatero (ma non equiangolo).



Inoltre, gli 8 spicchi in cui le rette tratteggiate dividono l'ottagono sono tutti congruenti tra loro, ottenuti, appunto, per riflessione in tali rette. Non sono però triangoli isosceli.

Talete mostra chiaramente che il segmento rosso in figura è un quarto del lato del quadrato. Se poi consideriamo il triangolo con i vertici blu, il segmento verde congiunge il vertice con il baricentro (punto nero).

Dunque la lunghezza dell'altezza relativa al lato rosso (in marrone) è $1/3$ della metà del lato del quadrato (anch'esso in marrone), in quanto il baricentro divide la mediana in rapporto $2 : 1$.

Quindi lo spicchio di ottagono racchiuso dai segmenti verde e rosso ha area

$$\frac{1}{2} \frac{\ell}{4} \frac{\ell}{6} = \frac{\ell^2}{48}$$

e dunque l'area dell'ottagono è

$$\ell^2/6 = 5520.66 \dots$$

La risposta è $\boxed{5520}$.

19. Altro esercizio in cui dobbiamo scrivere ordinatamente tutti i casi.

Un messaggio di tre caratteri in 4 cifre sarà in una delle forme (1) $a|b|cd$ o (2) $a|bc|d$ o (3) $ab|c|d$.

Consideriamo un messaggio della forma 1. Guardiamo il valore di a :

- se $a = 1$, affinché sia solo della forma 1, dobbiamo avere che $d = 0$ - ci sono 9×2 messaggi di questo tipo
- se $a = 2$, affinché sia solo della forma 1, dobbiamo avere $b \geq 7$ - e ci sono 3×17 messaggi di questo tipo - oppure $b \leq 6$ e $d = 0$ - e ci sono 6×2 messaggi di questo tipo;
- se $a \geq 3$, affinché sia solo della forma 1, dobbiamo avere $b \geq 3$ - e ci sono $7 \times 7 \times 17$ messaggi di questo tipo - oppure $b \leq 2$ e $d = 0$ - e ci sono $7 \times 2 \times 2$ messaggi di questo tipo.

Consideriamo un messaggio della forma 2.

- se $a = 1$, il messaggio è univoco se solo se $c = 0$ - ci sono 2×9 messaggi di questo tipo;
- se $a = 2$, il messaggio è univoco se e solo se $c = 0$ - ci sono 2×9 messaggi di questo tipo;
- se $a \geq 3$, il messaggio è univoco se e solo se $c = 0$ - ci sono $7 \times 2 \times 9$ messaggi di questo tipo - oppure $c = 2$ e $d \geq 7$ - ci sono $7 \times 2 \times 3$ messaggi di questo tipo - oppure $c \geq 3$ - ci sono $7 \times (7 + 4) \times 9$ messaggi di questo tipo.

Consideriamo un messaggio della forma 3.

- se $b = 0$, il messaggio è univoco - ci sono $2 \times 9 \times 9$ messaggi di questo tipo;
- se $b = 1$, il messaggio non è mai univoco;
- se $b = 2$, il messaggio è univoco se e solo se $c \geq 7$ - ci sono $2 \times 3 \times 9$ messaggi di questo tipo;
- se $b \geq 3$, il messaggio è univoco se e solo se $c = 2$ e $d \geq 7$ - ci sono $(7 + 4) \times 3$ messaggi di questo tipo - oppure se $c \geq 3$ - ci sono $(7 + 4) \times 7 \times 9$ messaggi di questo tipo.

Sommando tutto otteniamo 2781. La risposta è $\boxed{2781}$.

20. Un polinomio pentalitico si può scrivere come

$$P(x) = A(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)(x - a_5)$$

e, se x è intero, i fattori tra parentesi sono tutti diversi. Un numero M tale che $P(x) = M$ non abbia soluzioni intere per nessun polinomio pentalitico deve avere al più 2 fattori primi distinti; se infatti M avesse 3 fattori primi, potremmo scrivere

$$M = p \cdot q \cdot r \cdot (1) \cdot (-1) \cdot (-1)$$

e trovare un polinomio pentalitico e un numero naturale n tali che $A = -1$, $n - a_1 = p$, $n - a_2 = q$, $n - a_3 = r$, $n - a_4 = 1$, $n - a_5 = -1$.

Partendo da 10000, troviamo $9999 = 9 \cdot 11 \cdot 101$ che quindi non va bene e poi $9998 = 2 \cdot 4999$, che va bene.

La risposta è $\boxed{9998}$.

21. Visto che 26 successioni per ricorrenza sono troppe, deve esserci chiaramente qualche regolarità che permetta di scrivere la formula generale di quanto richiesto.

Sappiamo che la successione B_j è quella dei Fibonacci e la formula generale è già abbastanza complicata, quindi probabilmente c'è un modo di scrivere il termine particolare richiesto (A_2 , B_4 , C_6 etc), cioè l'ultimo che "usa" uno degli uni iniziali.

Sia α_n una successione definita da

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 1 \quad \alpha_n = \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_{n-k}.$$

Allora possiamo vedere che $\alpha_{k+1} = k$ e

$$\alpha_{k+2} = k - 1 + k = 2k - 1$$

in quando avremo "perso" l'uno dato da α_1 , ma guadagnato un k dato da α_k ; poi

$$\alpha_{k+3} = (2k - 1) - 1 + 2k - 1 = 4k - 3$$

poiché avremo perso anche l'uno dato da α_2 , ma guadagnato un $2k - 1$ da α_{k+1} e allo stesso modo

$$\alpha_{k+4} = (4k - 3) - 1 + 4k - 3 = 8k - 7.$$

Ovvero se definiamo

$$\beta_1 = k, \quad \beta_n = 2\beta_{n-1} - 1$$

allora $\alpha_{k+j} = \beta_j$ per $1 \leq j \leq n$.

E noi sappiamo che $\beta_j = 2^{j-1}(k - 1) + 1$. Quindi $\alpha_{n+j} = 2^{j-1}(k - 1) + 1$.

Quindi

$$A_2 + B_4 + \dots + Z_{52} = 2^0(1-1) + 1 + 2^1(2-1) + 1 + 2^2(3-1) + 1 + \dots = 26 + \sum_{n=0}^{25} n2^n = 26 + 24 \cdot 2^{26} + 2 = 3 \cdot 2^{29} + 28 = 1610612764.$$

La risposta è $\boxed{2764}$.

N.B.: abbiamo usato che

$$\sum_{n=0}^k n2^n = 2((k-1)2^k + 1)$$

che si può ottenere facilmente con un double counting: consideriamo la tabella $k+1 \times k+1$

$$\begin{array}{ccccc} \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \dots & \color{red}{1} \\ 2 & \color{red}{2} & \color{red}{2} & \dots & \color{red}{2} \\ \vdots & & & & \\ 2^{k-1} & 2^{k-1} & 2^{k-1} & \dots & \color{red}{2^{k-1}} \\ 2^k & 2^k & 2^k & \dots & \color{red}{2^k} \end{array}$$

il nostro problema è sommare tutti i numeri neri.

La somma di tutti gli elementi della tabella è $(k+1)(2^{k+1} - 1)$ e la somma della parte rossa della j esima colonna è $2^{j+1} - 1$. Dunque la somma di tutti i numeri rossi è $2^{k+2} - 2 - (k+1)$ e in conclusione la somma dei numeri neri è

$$2^{k+1}(k+1) - 2^{k+2} - (k+1) + 2 + (k+1) = (k-1)2^{k+1} + 2.$$