

Enumerazione in geometria: una affascinante storia millenaria e sviluppi recenti

Ciro Ciliberto

Università di Roma "Tor Vergata"

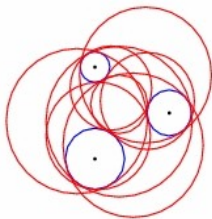
Milano Bicocca
29 Ottobre 2025

Qual è il problema?

- Gli oggetti di interesse di base nella **geometria algebrica** sono le **varietà algebriche**, che sono definite in uno spazio affine o proiettivo da equazioni polinomiali. Di solito variano in famiglie, i cui **spazi di parametri**, spesso chiamati **spazi dei moduli**, sono essi stessi varietà.
- Se si ha una famiglia di varietà (che possono essere rette, piani, circonferenze, parabole, ecc.) dipendenti da un certo **numero n di parametri**, si possono considerare i membri di questa famiglia che verificano **n condizioni date**: tante condizioni quanti sono i parametri. In tal caso ci si può aspettare che solo un numero finito di membri della famiglia verifichi le condizioni date.
- La **geometria enumerativa** è la parte della **geometria algebrica** che si occupa del problema del **calcolo del numero** di questi oggetti.
- **Ci sono diverse domande da porsi**: che tipo di famiglie stiamo considerando? Che tipo di condizioni stiamo imponendo? Accade davvero che, in una situazione come quella di cui sopra, il numero di soluzioni è finito? Che questo numero è determinato in modo univoco? E, **cosa più importante**: qual è lo scopo del calcolo di questi numeri?
- **Il mio piano**: piuttosto che discutere di questi problemi generali, è meglio considerare alcuni esempi guida. Lo farò seguendo uno **schema storico**. Poi mi concentrerò su uno specifico problema classico, attorno al quale l'argomento negli ultimi tre decenni ha visto uno sviluppo enorme, la creazione di nuove tecniche, nuove connessioni con altre parti della matematica e delle scienze, un completo cambiamento di prospettiva.

Preistoria: Apollonio

- Nel suo celebre trattato “Coniche”, Apollonio di Perga (circa 262-180 a.C.) affronta i primi problemi di geometria enumerativa.
- In una delle 387 proposizioni del libro Apollonio dimostra, con un argomento geometrico, che **dati 5 punti generali del piano, esiste un'unica conica passante per essi**.
- La sua opera “Tangenze” è andata perduta, ma è sopravvissuto un resoconto del IV secolo di Pappo di Alessandria (circa 290–350). Apollonio affermava, forse suggerendo una dimostrazione sintetica, che **date 3 circonferenze, ci sono al massimo 8 circonferenze tangenti alle 3 date**. Questo divenne famoso come **Problema di Apollonio**.
- Il Problema di Apollonio è stato ampiamente studiato a partire dal Rinascimento, ad esempio da François Viète (1540–1603), René Descartes (1596-1650), Johannes Kepler (1571-1630) e Isaac Newton (1642-1727), ecc.



Una soluzione del Problema di Apollonio

L'irruzione dell'algebra in geometria

- René Descartes, con l'introduzione delle **coordinate cartesiane**, stabilì un dizionario perfetto tra algebra e geometria: alcuni problemi posti da Apollonio e da Pappo sono stati risolti da Cartesio con metodi algebrici utilizzando le coordinate.
- L'uso delle coordinate cartesiane segna, tra l'altro, l'inizio della geometria algebrica che, da allora, ha incluso gran parte della geometria enumerativa.
- In coordinate, il Problema di Apollonio può essere impostato nel modo seguente. Si consideri la circonferenza C con centro l'origine $O(0,0)$ e raggio 1. Una circonferenza arbitraria Γ ha equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

e dipende dai **3 parametri** (a, b, c) . Se Γ deve essere tangente a C allora il sistema

$$(C) \quad x^2 + y^2 = 1, \quad (L) \quad ax + by + c + 1 = 0$$

deve avere una sola soluzione (con molteplicità 2), quindi la retta L deve essere tangente a C , cioè, la distanza di L da O deve essere 1, il che porta all'equazione di grado 2 in (a, b, c)

$$a^2 + b^2 = (c + 1)^2.$$

- Se fissiamo altre due circonferenze e imponiamo a Γ di essere tangente ad esse, otteniamo altre due equazioni di grado 2 in (a, b, c) e infine dobbiamo risolvere un sistema di 3 equazioni di grado 2 nelle 3 incognite (a, b, c) .
- Se le tre circonferenze vengono scelte in modo **sufficientemente generale**, questo sistema ha esattamente 8 soluzioni.

Il teorema di Bézout

- **Perché 8?** Perché abbiamo 3 equazioni di grado 2 in tre variabili e $8 = 2 \times 2 \times 2$.
- Questo è il contenuto del **Teorema di Bézout** (Étienne Bézout, 1730-1783): consideriamo r **ipersuperficie** con **equazioni omogenee**

$$f_i(x_0, \dots, x_r) = 0 \quad \text{di grado } d_i \quad \text{for } i = 1, \dots, r,$$

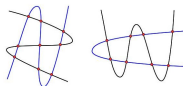
in uno **spazio proiettivo** $\mathbb{P}^r$ sui **numeri complessi**, allora o esse si intersecano in

$$d = d_1 \cdot d_2 \cdots d_r$$

punti, ciascuno contato con la sua **molteplicità**, oppure hanno in comune una varietà di dimensione positiva (e il sistema ha infinite soluzioni non proporzionali).

- Ad esempio, due curve di grado d_1 e d_2 nel piano proiettivo complesso hanno $d = d_1 d_2$ punti in comune (contati con molteplicità)

$$d_1 = d_2 = 3$$



$$d_1 = 2, d_2 = 4$$

oppure hanno una **componente comune**, come due coniche, ciascuna costituita da due rette, aventi una retta in comune.

Numeri complessi

- Il punto di partenza del teorema di Bézout è il **Teorema Fondamentale dell'Algebra**: un'equazione polinomiale di **grado n**

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad \text{con } a_0 \neq 0$$

ha esattamente n soluzioni pur di contare ogni soluzione con la sua **molteplicità**.

- La dimostrazione del Teorema di Bézout sostanzialmente si riduce a questo: con un processo di successiva **eliminazione delle variabili** si può ridurre la soluzione di un sistema di r equazioni di grado $d_1, d_2, \dots, d_r$ in r variabili, alla soluzione di un'unica equazione di grado $d = d_1 \cdot d_2 \cdots d_r$ in una variabile.
- Per la validità del Teorema Fondamentale dell'Algebra, dobbiamo ammettere che le soluzioni siano **numeri complessi**, anche se i coefficienti $a_0, \dots, a_n$ del polinomio iniziale sono nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Quindi la **prima lezione** che impariamo è: **per ottenere tutte le soluzioni che cerchiamo dobbiamo lavorare con numeri complessi**, o su un **campo algebricamente chiuso**.
- I numeri complessi furono introdotti dagli algebristi italiani Gerolamo Cardano (1501–1576) e Raffaele Bombelli (1526–1572) e utilizzati per la prima volta in geometria da Caspar Wessel (1745–1818) e Carl Friedrich Gauss (1777–1855) e successivamente, in modo più sistematico, da Jean-Victor Poncelet (1788–1867).

Spazi proiettivi

- Il punto di vista **proiettivo** fu introdotto da Filippo Brunelleschi (1377-1446) e sistematizzato da Leon Battista Alberti (1404-1472) nel "De pictura" (1435). L'idea è di aggiungere allo spazio della geometria euclidea i **punti all'infinito**, che possono essere pensati come le **direzioni di tutte le rette**. In questo modo due rette parallele si intersecano in un **punto all'infinito**.
- Questo procedimento è essenziale nella geometria enumerativa, perché, ad esempio, intersecando due curve nel piano e facendole variare con continuità può accadere che alcuni punti di intersezione **sfuggano all'infinito**, tanto che potremmo perderne la traccia. Vogliamo invece che il numero di soluzioni **rimanga lo stesso** se spostiamo i dati con continuità.
- Pensiamo a questo esempio: in generale una retta interseca una conica in due punti distinti, ma una **parabola** e tutti i suoi **diametri** (cioè le rette parallele al suo asse di simmetria) si intersecano in un solo punto, mentre l'altra intersezione è il **punto all'infinito della parabola**.



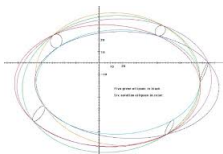
- In uno spazio proiettivo $\mathbb{P}^r$ ar r dimensioni si possono introdurre **coordinate omogenee** $[x_0, \dots, x_r]$ che sono non tutte nulle e definite a meno di un fattore di proporzionalità. Si può pensare ai punti all'infinito come quelli sull'**iperpiano** di equazione $x_0 = 0$ e i punti al finito sono quelli con $x_0 \neq 0$ e **coordinate cartesiane** $\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$.
- Lo spazio proiettivo ha un'importante proprietà topologica, è **compatto**, cioè esso contiene i limiti di tutte le successioni (ragionevoli) di punti in esso. Pertanto nessuna soluzione di problemi enumerativi può **sfuggire** se variamo i dati con continuità.
- Quindi la **seconda lezione** che impariamo è: **per ottenere tutte le soluzioni dei problemi enumerativi dobbiamo lavorare in spazi proiettivi**, o meglio, **in ambienti compatti**. Anche se partiamo da un problema geometrico in un ambiente non compatto, dobbiamo **compattificarlo** per poter contare realmente le soluzioni.

XIX secolo: l'età classica

- Nel XIX secolo assistiamo al primo spettacolare sviluppo della geometria algebrica, e in particolare della geometria enumerativa, come branca indipendente della matematica.
- Poncelet avvia un uso sistematico dei numeri complessi nell'ambito proiettivo. Inoltre introduce due idee importanti: il concetto di **dualità** (che ora tralascio) e il cosiddetto **principio di conservazione del numero**.
- Il **principio di conservazione del numero**, enunciato ma mai dimostrato da Poncelet e dai suoi seguaci del XIX secolo, risale ai tentativi di Viète di risolvere il problema di Apollonio.
- Essenzialmente il principio afferma che **specializzando (con opportuna cautela) i dati di un problema geometrico in posizioni particolari, il numero di soluzioni, se finito, rimane lo stesso**.
- Ciò è stato fortemente contestato da Augustin Cauchy (1789–1857) e da Joseph Gergonne (1771–1859), ha causato aspre dispute per più di un secolo ed è stato reso disponibile solo in tempi recenti utilizzando nuove tecniche algebriche e topologiche.

Il Problema di Steiner

- Un grande personaggio della prima metà del XIX secolo è Jacob Steiner (1796–1863). Seguendo l'approccio algebrico al Problema di Apollonio e alle teorie di Poncelet, affermò nel 1848 che il numero di coniche tangenti a 5 coniche date in posizione generale è 7776, un'affermazione che fu presto scoperta essere errata, diventando famosa come **Problema di Steiner**.



Sei soluzioni al Problema di Steiner

- L'idea di Steiner era la seguente. La conica generale ha equazione della forma

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

quindi dipende dai 6 coefficienti (a, b, c, d, e, f) , dati a meno del prodotto per un numero non nullo: quindi i **coefficienti essenziali** sono 5 e le coniche possono essere pensate come punti di uno spazio proiettivo a 5 dimensioni con coordinate omogenee $[a, b, c, d, e, f]$.

- Si vede che essere tangenti ad una data conica C si traduce in un'equazione omogenea

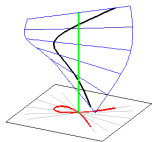
$$F_C(a, b, c, d, e, f) = 0$$

di grado 6. Quindi essere tangenti a 5 coniche dà origine a un sistema di 5 equazioni di grado 6. Steiner applicava quindi il teorema di Bézout per concludere che il numero di soluzioni è $7776 = 6^5$.

- Il motivo dell'errore di Steiner è che tutti i polinomi F_C si annullano lungo una superficie, la cosiddetta **superficie di Veronese** i cui punti parametrizzano le coniche costituite da una **retta doppia**, quindi il sistema suddetto ha infinite soluzioni, e pertanto ad esso non può applicarsi il Teorema di Bézout.

Il Teorema di Chasles

- La soluzione del problema di Steiner consiste nel comprendere quante intersezioni cinque ipersuperficie generali del tipo $F_C = 0$ come sopra hanno **fuori dalla superficie di Veronese**. Questo è un processo di **eliminazione dell'eccesso di intersezione**, che è tipico della geometria enumerativa e appare qui per la prima volta.
- Il numero corretto 3.264 fu trovato nel 1859 da Ernest de Jonquières (1820–1901), che non lo pubblicò a causa della grande reputazione di Steiner, e successivamente da Michel Chasles (1793–1880) nel 1864, che introdusse a questo scopo la sua **teoria dei numeri caratteristici**.
- In termini moderni, l'approccio di Chasles può essere visto come un modo di cambiare lo spazio dei parametri per le coniche, sostituendo il $\mathbb{P}^5$ originale che parametrizza le coniche con il suo **scoppiamento** lungo la superficie di Veronese: lo scoppio è un modo di **separare** le intersezioni delle ipersuperficie del tipo $F_C = 0$ lungo la superficie di Veronese.



Scoppiamento del piano in un punto

- Sulla falsariga di Poncelet e Chasles, la seconda metà del XIX secolo vide una grande fioritura della geometria enumerativa, con l'opera di De Jonquières, Georges Halphen (1844–1889), Hieronymus Zeuthen (1839–1920), Hermann Schubert (1848–1911), ecc.
- In particolare, Schubert, utilizzando una miscela di tutte le tecniche introdotte all'epoca, incluso il principio di conservazione del numero (pericolosamente scivoloso), trovò diversi numeri interessanti. Ad esempio, il numero 666.841.088 di quadriche in $\mathbb{P}^3$ che sono tangenti a 9 date quadriche in posizione generale, rispondendo così al **problema di Steiner generalizzato**.

Il XV Problema di Hilbert

- Al Secondo Congresso Internazionale dei Matematici, tenutosi a Parigi nell'agosto del 1900, David Hilbert (1862–1943) presentò 23 famosi problemi.



David Hilbert

- I problemi, tutti irrisolti all'epoca, hanno avuto una grande influenza sulla matematica del XX secolo. Durante la sua conferenza, Hilbert presentò in realtà solo 10 problemi. L'elenco completo fu pubblicato in seguito: la traduzione inglese, dovuta a Mary Frances Winston Newson (1869–1959), apparve nel Bulletin of the American Mathematical Society nel 1902.
- Il quindicesimo problema di Hilbert era: **dare un fondamento rigoroso al calcolo enumerativo di Schubert**, in particolare al principio di conservazione del numero.

L'età neoclassica della geometria enumerativa

- Il Quidicesimo Problema di Hilbert apre una nuova era nella geometria enumerativa, che vorrei chiamare l'**era neoclassica**, dedicata all'introduzione di strumenti appropriati per affrontare rigorosamente i problemi del XIX secolo e quelli simili che si sarebbero presentati.
- Il primo tentativo in questa direzione si deve a Francesco Severi (1879–1961), con una memoria del 1902 seguita da diversi altri contributi. L'opera di Severi, pur ricca di idee brillanti, era costellata di varie serie imprecisioni che suscitarono critiche ancora più forti di quelle rivolte ai contributi ottocenteschi. Come afferma David Mumford:

It is hard to untangle everywhere what he conjectured and what he proved and, unfortunately, some of his conclusions are incorrect.

- Le nuove tecniche introdotte nella geometria algebrica a partire dagli anni '30, da André Weil (1906-1998) e dai Bourbakisti, da Oscar Zariski (1899-1986) et al., e successivamente, negli anni '60-'70, da Jean-Pierre Serre, Alexandre Grothendieck (1928-2014), Friedrich Hirzebruch (1927-2012), David Mumford et al., sono state in grado, tra le altre cose, di fornire gli strumenti giusti per risolvere il XV Problema di Hilbert.
- Le parole chiave sono: **classi caratteristiche, anelli di intersezione, teorema di Grothendieck-Riemann-Roch, equivalenza algebrica, omologica, razionale e numerica**, ecc.
- Tuttavia, il processo richiese tempo. Ad esempio, la soluzione di Chasles al problema di Steiner fu posta su basi rigorose solo nel 1978 da William Fulton e Robert Macpherson.
- Uno dei caposaldi dell'età neoclassica è il libro di William Fulton **Intersection Theory** del 1984. In un certo senso, l'età neoclassica non è ancora finita, come indicato dalla pubblicazione, abbastanza recente, di un libro di David Eisenbud e Joe Harris sull'argomento.

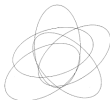
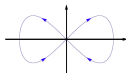
L'era contemporanea

- Da circa 30 anni si è verificato un totale cambiamento di paradigma in geometria enumerativa. Ciò è dovuto alla concomitanza di due fatti: la considerazione di un problema classico **molto difficile**, che era resistente anche alle nuove tecniche introdotte per risolvere il XV Problema di Hilbert, e l'introduzione di idee completamente nuove, provenienti dalla fisica, in particolare dalla **teoria delle stringhe**.
- Una **curva algebrica** C nel piano affine è definita da un'equazione della forma

$$f(x, y) = 0$$

con $f(x, y)$ polinomio non nullo, che di norma assumerò essere **irriducibile**, e allora si dice che C stessa è irriducibile.

Curva irriducibile



Curva riducibile in 5 coniche

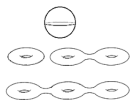
- Ricordiamo che dobbiamo lavorare con numeri complessi, quindi sia i coefficienti di $f(x, y)$ sia le soluzioni della equazione che definisce C sono numeri complessi. Inoltre lavoriamo nel **piano proiettivo complesso** $\mathbb{P}^2$, ovvero aggiungiamo i **punti all'infinito**.
- Il grado d di $f(x, y)$ è detto **grado** della curva C . Secondo il teorema di Bezout, è il **numero di punti che C ha in comune con le rette**, tenendo conto delle molteplicità. Se $d = 1$ abbiamo le **rette**, se $d = 2$ le **coniche**, se $d = 3$ le **cubiche**, ecc.
- Come le rette dipendono da 2 parametri e le coniche da 5 parametri, le curve di grado d dipendono da

$$r_d = \frac{d(d+3)}{2}$$

parametri, i.e., i coefficienti delle loro equazioni, dati a meno del prodotto per una costante non nulla: **l'insieme V_d delle curve piane di grado d può essere riguardato come uno spazio proiettivo di dimensione r_d .**

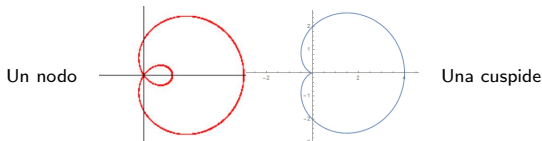
Come sono fatte le curve

- I numeri complessi $z = x + iy$ dipendono dai due parametri reali x, y , cioè $\mathbb{C}$ può essere identificato con il piano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, quindi ha **dimensione reale 2**. Una curva ha dimensione complessa 1, quindi dobbiamo pensare ad essa come ad una **superficie reale**: questo è il punto di vista introdotto da Bernhard Riemann (1826-1866) nel 1846. Quando disegniamo una curva, di solito disegniamo solo la sua **parte reale**.
- Una curva piana C può essere **liscia**, cioè localmente appare come una **superficie liscia orientabile**, che è una sfera con un certo numero g di **manici** o una ciambella con g **fori**. Il numero g è chiamato **genere** della curva: è un **invariante topologico**.



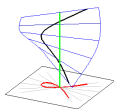
Curve di genere 0, 1, 2 e 3

- Può però accadere che C sia **singolare**, cioè che, se la consideriamo come una superficie in $\mathbb{P}^2$, sia **pizzicata**, abbia una **cuspid**, oppure si **autointersechi**.
- Il tipo più semplice di **singolarità** è un **nodo**: una semplice autointersezione, in cui due **rami** della curva si intersecano **trasversalmente** e la curva localmente appare come due rette distinte che si intersecano in un punto comune.



Desingularizzazione

- Se C è singolare, possiamo **desingularizzarla**: nel caso nodale questo significa semplicemente che **separiamo i due rami** del nodo: questo può essere realizzato facendo uno scoppimento.



- In questo modo otteniamo una curva liscia $\tilde{C}$ e una mappa $f : \tilde{C} \longrightarrow \mathbb{P}^2$, la cui immagine è C . Si definisce **il genere di $\tilde{C}$ come genere di C** .
- Una formula dovuta ad Alfred Clebsch (1833–1872) dice che, se una curva piana irriducibile C di grado d ha δ nodi e nessuna altra singolarità, allora il suo genere g è dato da

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta$$

- Curve di grado d con il massimo numero di nodi

$$\delta = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

e di genere 0 sono dette **razionali**, perché possono essere parametrizzate con **funzioni razionali**, cioè quozienti di polinomi.

- La desingularizzazione di una curva razionale è una **sfera**, cioè è la retta proiettiva $\mathbb{P}^1$, uguale a $\mathbb{C}$ più il punto all'infinito.

Varietà di Severi e loro gradi

- Consideriamo la (chiusura del) sottoinsieme $V_{d,g}$ di $V_d \cong \mathbb{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$ costituito da tutte le curve nodali irriducibili di genere g , aventi quindi

$$\delta = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - g$$

odi e nessuna altra singolarità. Questa è chiamata **varietà Severi** di tipo (d, g) .

- Severi dimostrò nel 1921 che $V_{d,g}$ è una **varietà algebrica** di dimensione

$$r_d - \delta = \frac{d(d+3)}{2} - \delta = 3d - 1 + g.$$

In particolare le curve nodali razionali di grado d dipendono da $3d - 1$ parametri.

- Severi ha anche affermato, con una dimostrazione errata, che $V_{d,g}$ è **irriducibile**. Ciò è stato dimostrato da Joe Harris solo nel 1986.
- Problema:** trovare i **numeri di Severi**, ovvero i **gradi** $N_{d,g}$ delle varietà di Severi $V_{d,g}$. Ciò equivale a chiedere quante curve di grado d con δ nodi passano per $3d - 1 + g$ punti **generali** nel piano. In particolare, nel caso razionale, trovare il numero $N_d := N_{d,0}$ di curve razionali di grado d passanti per $3d - 1$ punti generali nel piano.
- I primi numeri N_d si calcolano facilmente:

$$N_1 = 1, \quad \text{vi è un'unica retta passante per due punti distinti (Euclide)}$$

$$N_2 = 1, \quad \text{vi è un'unica conica passante per 5 punti generali (Apollonio)}$$

$$N_3 = 12, \quad \text{vi sono 12 cubiche nodali passanti per 8 punti generali (Chasles)}$$

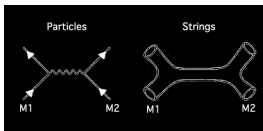
Con i metodi del XIX secolo, ad esempio con alcune formule trovate da George Salmon (1819–1904), è ancora possibile calcolare

$$N_4 = 620$$

ma i calcoli da qui in poi diventano estremamente ardui coi metodi classici.

Perché questo problema è interessante?

- Intorno al 1990, alcuni fisici teorici scoprirono un collegamento inaspettato tra il problema del calcolo dei gradi di Severi, in particolare dei numeri N_d , e la **teoria delle stringhe**.
- L'oggetto fondamentale della teoria delle stringhe è un laccio, che possiamo immaginare chiuso, che si evolve nello spazio descrivendo una superficie.



- Nei modelli di teoria delle stringhe, lo spazio in cui la stringa evolve è una varietà algebrica compatta complessa V di dimensione 3 di un tipo speciale, precisamente una **varietà di Calabi-Yau**. Da un punto di vista matematico, non è necessario (anche se interessante) fare questa ipotesi e possiamo supporre, per iniziare, che V sia semplice quanto vogliamo, ad esempio, sia il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$.
- Il caso più semplice di evoluzione di una stringa è quello di un laccio che evolvendo descriva una sfera, vale a dire una curva razionale nel piano.
- I fisici scoprirono anche che alcune funzioni rilevanti in diversi modelli matematici delle teorie quantistiche dei campi possono essere espresse come serie di potenze i cui coefficienti sono importanti **invarianti geometrici** della varietà V . Essi scoprirono anche che questi invarianti possono essere calcolati ricorsivamente se la serie verifica qualche equazione differenziale.

Risoluzione del problema

- Ad esempio, si consideri la serie

$$F(x, y) = \sum_{d=1}^{\infty} N_d \frac{y^{3d-1}}{(3d-1)!} e^{dx}$$

- Maxim Kontsevich ha dimostrato nel 1993 che $F(x, y)$ verifica l'equazione differenziale WDVV (Edward Witten–Robbert Dijkgraaf–Erik Verlinde–Herman Verlinde, 1990)

$$\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}$$

- Utilizzando ciò, Kontsevich ha trovato la formula ricorsiva

$$N_d = \sum_{d_1+d_2=d} N_{d_1} N_{d_2} \left[d_1^2 d_2^2 \binom{3d-4}{3d_1-2} - d_1^3 d_2 \binom{3d-4}{3d_1-1} \right]$$

Una dimostrazione diversa fu fornita nel 1995 da Yongbin Ruan e Gang Tian.

- Pertanto abbiamo

$$N_5 = 87.304, N_6 = 26.312.976, N_7 = 14.616.808.192, N_8 = 13.525.751.027.392, \dots$$

- Oggi abbiamo anche dimostrazioni di stampo (neo)classico di questa e di formule più generali. Ad esempio, Ziv Ran nel 1987, Lucia Caporaso e Joe Harris nel 1998, Ravi Vakil nel 2000, hanno fornito formule ricorsive per il calcolo dei gradi di tutte le varietà di Severi, utilizzando **considerazioni di limite** e una versione molto perfezionata del principio di conservazione del numero di Poincaré.

Spazi di moduli

- Consideriamo l'insieme $M_{g,n}$ delle curve di genere g con n punti distinti marcati. Questa è una varietà algebrica, essenzialmente introdotta da Riemann, chiamata **spazio dei moduli delle curve n -puntate di genere g** . Essa ha dimensione $3g - 3 + n$, a meno che non sia $g = 1, n = 0$ o $g = 0, n < 3$ (casi che non considererò).
- $M_{g,n}$ non è compatto, ma ne esiste una compattificazione abbastanza semplice la **compattificazione di Deligne–Mumford** $\bar{M}_{g,n}$, ottenuta aggiungendo a $M_{g,n}$ le **curve stabili** ossia curve nodate n -puntate con un numero finito di automorfismi. Qui di seguito vediamo una curva stabile di genere 6 con 5 punti marcati:



- Per esempio, $\bar{M}_{0,3}$ è un punto, $\bar{M}_{0,4}$ è isomorfo a $\mathbb{P}^1$.
- I numeri di Severi si possono interpretare come numeri di intersezione di sottovarietà notevoli di $M_{g,n}$, e dunque determinabili con opportune difficili varianti del teorema di Bézout.

- La **geometria tropicale** è una nuova area della matematica che ha preso l'avvio all'inizio degli anni 2000. In parole povere, è una versione discretizzata della matematica, in particolare della geometria algebrica, che ha molte applicazioni (probabilità, statistica, biologia, ecc.).
- Il termine **tropicale** è stato coniato da matematici francesi in onore del matematico Brasiliano (nato in Ungheria) Imre Simon (1943–2009), che, lavorando in ambito informatico negli anni 1980, ha inventato le basi della matematica tropicale.

Curve piane tropicali

- Consideriamo la curva piana di equazione affine

$$f(x, y) = 0$$

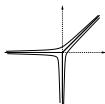
e trasformiamola con la mappa

$$\begin{array}{ccc} \text{Log}_t : (\mathbb{C} - \{0\})^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (\log_t |x|, \log_t |y|) \end{array}$$

- L'immagine è chiamata **ameba** della curva. Essa cattura varie proprietà geometriche e topologiche della curva originale. La prossima immagine mostra l'ameba di una cubica.



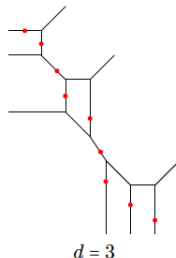
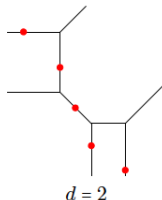
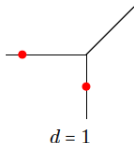
- Per una data curva piana C abbiamo una **famiglia di amebe** dipendenti dalla base t del logaritmo. Possiamo prendere il **limite** (nella metrica di Hausdorff sui compatti) di tutte queste amebe quando t tende a $+\infty$. Per la retta $x + y = 1$, il limite è



- Questo processo di passaggio al limite, eseguito in modo opportuno, porta a un grafico costituito da segmenti e semirette che sono i limiti dei **tentacoli dell'ameba**. Questa è la **tropicalizzazione** della curva C .

Calcolo tropicale dei numeri di Severi

- I numeri di Severi $N_{d,g}$ si possono calcolare in modo tropicale, dando così un approccio diverso al calcolo di questi numeri. Ciò si basa sul seguente teorema.
- **Teorema di corrispondenza di Grigori Mikhalkin** (2003): si considerino $3d - 1 + g$ punti sufficientemente generali nel piano reale. Allora $N_{d,g}$ è uguale al numero di curve tropicali **nodali** irriducibili di grado d e genere g , passanti per i punti dati, ciascuna contata con una **molteplicità** appropriata (computabile in modo combinatorio).



- Il calcolo di $N_{d,g}$ si trasforma in un conto puramente combinatorio. Questo è stato eseguito da E. Brugalle e G. Mikhalkin nel 2008.

Conclusione

Voglio concludere con una citazione dal menzionato libro di David Eisenbud e Joe Harris, che spiega il significato del lavoro in geometria enumerativa. A proposito del Problema di Steiner essi dicono:

*Il problema è emblematico della duplice natura della materia. Da un lato, **il numero in sé ha poca importanza**: la vita non sarebbe materialmente diversa se ce ne fossero di più o di meno. **Ma il fatto che il problema sia ben posto ... e che possiamo in effetti determinare quel numero, è al centro della geometria algebrica**. E le intuizioni sviluppate nel perseguimento di una rigorosa derivazione del numero, il riconoscimento della necessità e dell'introduzione di un nuovo spazio parametrico per le coniche piane e la comprensione del motivo per cui i prodotti di intersezione sono ben definiti per questo spazio, sono punti di riferimento nello sviluppo della geometria algebrica.*

Grazie per l'attenzione!