Risultati di rigidità per sottovarietà massime nello spazio pseudo-iperbolico

Enrico Trebeschi

17 Febbraio 2025

Le sottovarietà massime generalizzano le superfici minime in ambiente pseudo-Riemanniano, cioè sono sottovarietà con a curvatura media identicamente nulla. Il loro studio nello spazio pseudo-iperbolico, che è la generalizzazione dello spazio iperbolico in segnatura mista, è motivato da diversi fattori, che spaziano dalla geometria differenziale alla fisica relativistica fino ad arrivare, negli ultimi anni, alla topologia geometrica.

Un problema classico nello studio di sottovarietà minime della sfera unitaria consiste nel trovare un bound universale dall'alto per la norma della seconda forma fondamentale, vale a dire stimare la loro curvatura estrinseca.

In questo seminario, parlerò di un recente lavoro in collaborazione con Alex Moriani (Université Côte Azul), in cui forniamo un bound superiore ottimale per norma della seconda forma fondamentale per sottovarietà massime nello spazio pseudo-iperbolico. Inoltre, proviamo un risultato di rigidità, ovvero la norma della seconda fondamentale di una sottovarietà massima può realizzare questo bound solo se è costante, e siamo in grado di classificare esplicitamente le sottovarietà che lo realizzano.

L'equazione di Gauss trasforma la stima sulla curvatura estrinseca in una sulla curvatura intrinseca, permettendoci di provare che la curvatura scalare di una sottovarietà massima sia non positiva e di classificare quelle a curvatura scalare nulla. Nel caso Lorentziano, siamo in grado di dare una stima rigida anche sulla curvatura di Ricci.

Se rimarrà tempo, discuterò le implicazioni di questo lavoro nell'ambito della teoria di Teichmüller di rango e dimensione superiore, che studia le componenti connesse di $\mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)$ contenenti unicamente rappresentazioni fedeli e discrete, per M una varietà chiusa di dimensione $n > 2$ e G un gruppo di Lie semi-semplice di rango $r > 1$.

Rigidity Results for Maximal Submanifolds in Pseudo-Hyperbolic Space

Enrico Trebeschi

17 February 2025

Maximal submanifolds are the generalization in pseudo-Riemannian geometry of minimal surfaces, *i.e.* submanifolds with identically vanishing mean curvature. They have been studied within the framework pseudo-hyperbolic space, which is the generalization of hyperbolic space in mixed signature, due to several factors, ranging from differential geometry, relativistic physics, and, in recent years, geometric topology.

A classical problem in the study of minimal submanifolds of the unit sphere is to find a universal upper bound for the norm of the second fundamental form, that is, to estimate their extrinsic curvature.

In this seminar, I will discuss a recent work in collaboration with Alex Moriani (Université Côte d'Azur), in which we provide a sharp upper bound on the norm of the second fundamental form for maximal submanifolds in pseudo-hyperbolic space. In particular, this bound is rigid, meaning it can only be achieved identically, and we are able to explicitly classify maximal submanifolds achieving it.

Gauss equation translates the estimate on the extrinsic curvature in terms of the intrinsic curvature, allowing us to prove that the scalar curvature of a maximal submanifold is non-positive and to classify those with vanishing scalar curvature. In the Lorentzian case, we are able to provide a rigid estimate on the Ricci curvature as well.

If I have time, I would like to discuss the implications of this work in the context of higher dimension higher rank Teichmüller theory, namely the study of connected components of $\mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)$ containing only faithful and discrete representations, where M is a closed manifold of dimension $n > 2$ and G is a semi-simple Lie group of rank $r > 1$.