



Istruzioni Generali

- ▶ Per tutti i problemi⁽¹⁾ occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo zeri iniziali.
- ▶ Se la quantità richiesta è un numero negativo oppure il problema non ha esattamente una soluzione, si indichi 0000.
- ▶ Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera—cioè, il resto della divisione con 10^4 ; in altre parole, in ordine da sinistra a destra, la cifra delle migliaia, seguita da quella delle centinaia, poi quella delle decine, infine le unità.
- ▶ Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- ▶ Si ricorda che
 - a) la *parte intera* di un numero reale x è il più grande intero minore o uguale ad x ; si scrive $[x]$ —ad esempio $[\pi] = 3$, $[10] = 10$, $[\sqrt{17}] = 4$;
 - b) il *successivo* del numero intero n è il numero $n + 1$ e i due numeri sono detti *consecutivi*;
 - c) il *fattoriale* del numero intero n è il prodotto di tutti i numeri interi da 1 fino a n ; si scrive $n!$ —ad esempio $1! = 1$, $5! = 120$, $6! = 720$;
 - d) un *quadrato perfetto* è un numero intero che è quadrato di un numero intero—ad esempio 16 è un quadrato perfetto, 22 non è un quadrato perfetto;
 - e) una lista è *palindroma* se, letta da destra a sinistra, produce la stessa lista—ad esempio radar è palindroma; drone non è palindroma; 2020 non è palindromo; 2002 è palindromo.
- ▶ Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
 $\sqrt{2} = 1,4142$ $\sqrt{3} = 1,7321$ $\sqrt{5} = 2,2360$ $\pi = 3,1415$.

Buon divertimento!

⁽¹⁾ L'autore di un problema è indicato prima del testo.



1. Cerchi

Sandro Campigotto

L'area su cui due cerchi di raggio 10 cm e 50 cm si sovrappongono vale $20\pi \text{ cm}^2$. Quanto misura in cm^2 l'area ricoperta dalle due circonferenze?

2. Quadrati

Carlo Càssola

Qual è il quadrato di $\sqrt{2023} + \sqrt{112}$?

3. Reali

Carlo Càssola

Tre numeri reali positivi a , b e c sono tali che il prodotto di a e b coincide con il quadrato di c . La loro somma è 102 mentre la somma dei loro reciproci è $\frac{17}{18}$ e $a < b$. Quali sono i tre numeri a , b e c ?
[Dare come risposta il prodotto dei tre numeri.]

4. Compleanni

Carlo Càssola

Un nonno ultracentenario e un nipote compiono gli anni nello stesso giorno (ma hanno età diverse). Il nonno osserva che la sua età è un multiplo intero di quella di suo nipote e che sarà multipla di quella di suo nipote anche per i successivi cinque anni. Qual è la minima età che il nonno può avere oggi?

5. Cifre

Lorenzo Mazza

Dante e Marta vogliono entrambi aprire una cassaforte protetta da un PIN di quattro cifre. Entrambi sono venuti a sapere che la prima cifra è 2 e che il PIN è un multiplo di 9. Inoltre, Marta sa che Dante conosce anche la seconda e la terza cifra del PIN. Marta sa in più che il PIN è un numero pari. Vede che Dante non è in grado di determinare univocamente il PIN della cassaforte. Qual è il numero maggiore che Marta dovrà provare come PIN?

6. Vicini

Pietro Donatis

In un poligono regolare di 59 lati si tracciano da ogni vertice le due diagonali che lo congiungono con i vertici suoi secondi vicini. In questo modo si viene a tracciare una stella a 59 punte. Quanti gradi sessagesimali vale l'angolo in una punta della stella?

7. Torte e biscotti

Carlo Càssola

In pasticceria sono disponibili biscotti al cioccolato al costo di 1€ ciascuno, pasticcini a 2€ ciascuno, e torte a 11€ ciascuna. Il millesimo cliente della pasticceria riceve come premio 79€ da spendere totalmente e immediatamente. In quanti modi diversi può spendere il suo premio?

8. Interi

Carlo Càssola

Tutti i numeri interi da 1 a 10000 compaiono sul foglio. Quante cifre ci sono scritte in totale?

9. Pavimenti

Anna Ulivi

Un pavimento rettangolare con lati di lunghezza intera in dm deve essere ricoperto completamente da piastrelle quadrate di lato 1 dm. Sono disponibili 1000 piastrelle. Sono state posate tutte le piastrelle lungo il bordo del pavimento: sono 124. Usate tutte le 1000 piastrelle, il pavimento non è completamente coperto. Anzi il numero di piastrelle mancanti è il massimo possibile con i dati a disposizione. Quante piastrelle mancano?

10. Triple

Carlo Càssola

Una tripla ordinata di numeri interi maggiori di 9 e minori di 100 è *mirata* quando, prese due componenti qualunque in essa, la loro somma è uguale al rimanente numero della tripla scritto a cifre invertite. Quante sono le triple ordinate di numeri mirati?

11. Tessere

Sandro Campigotto

Tre amici, Andrea, Barbara e Claudio, hanno riempito un sacchetto con 100 tessere, ciascuna contrassegnata da un numero (da 1 a 100, ciascuno dei cento numeri compare su almeno una tessera). Andrea pesca un numero, lo guarda e lo rimette nel sacchetto. Poi Claudio pesca un numero, lo guarda e lo rimette nel sacchetto. Infine Barbara pesca un numero, lo guarda e lo rimette nel sacchetto. Qual è la probabilità che uno dei tre abbia pescato il numero che è esattamente la somma dei due numeri pescati dai suoi amici?
[Dare come risposta la probabilità moltiplicata per 10000.]

12. Riquadri a T

Sandro Campigotto

Su un foglio quadrettato scrivi 9 in un riquadro. Poi segna i tre riquadri che seguono quello con la cifra 9 verso destra, verso sinistra e verso il basso: in totale sono segnati nove riquadri vuoti. In quanti modi diversi puoi disporre tutte le cifre da 0 a 8 nei nove riquadri vuoti in modo che in ciascuna delle tre direzioni dal riquadro "centrale" (quello con la cifra 9) verso l'esterno, le cifre siano disposte in ordine decrescente?

13. In un triangolo

Lorenzo Mazza

Nel triangolo ABC l'angolo \widehat{ACB} è 42° . I punti L , M e N , sui lati AB , BC e CA rispettivamente, sono tali che $LB = LM$ e $LA = LN$. Sia O il circocentro del triangolo MNC . Qual è l'ampiezza in gradi sessagesimali dell'angolo \widehat{OLM} ?

14. Pagine strappate

Carlo Càssola

Su tutte le pagine di un libro sono stampati i numeri di pagina, tutti scritti in cifre arabe. Dal libro viene strappata una pagina (che contiene due pagine consecutive). La somma dei numeri delle pagine rimanenti è 22000. Quante pagine aveva il libro originariamente?

15. Il regalo

Simon Ghizzo

Gianfilippo deve incartare il regalo di compleanno per il suo amico Pieralfredo. Il pacchetto è un parallelepipedo di dimensioni 25 cm × 30 cm × 50 cm. Gianfilippo decide di chiudere l'incarto del pacchetto utilizzando due nastri: uno rosso di larghezza 3 cm e uno giallo di larghezza 7 cm. Utilizza quindi i nastri per cingere il pacchetto formando delle croci su ciascuna delle sue facce, quello giallo posto perpendicolarmente ai lati di 30 cm e quello rosso agli altri. Qual è il valore in cm^2 dell'area del pacchetto non coperta dai nastri?

16. Quadrilateri inscatolati

Anna Ulivi

Sia $ABCD$ un rettangolo con base lunga 48 m e altezza lunga 24 m. Si prendono i quattro punti medi dei lati, A_1 su AB , B_1 su BC , C_1 su CD e D_1 su DA e si considera il quadrilatero $A_1B_1C_1D_1$. Su questo si prendono i quattro punti medi dei lati, e si considera il quadrilatero così ottenuto. Si continua fino al quadrilatero $A_{11}B_{11}C_{11}D_{11}$. Quanto misura in mm il perimetro del quadrilatero $A_{11}B_{11}C_{11}D_{11}$?

17. Sinner e Medvedev

Andrea Giusto

Sinner e Medvedev giocano l'incontro finale di un torneo di tennis. Un incontro (=match) di tennis tra due giocatori è suddiviso in giochi (=games). In un game i giocatori cercano di vincere punti; ogni punto viene vinto da uno dei giocatori; i giocatori giocano un punto alla volta. Un game finisce con la vittoria di uno dei giocatori quando questo è il primo a vincere almeno 4 punti e almeno 2 punti in più di quelli dell'avversario. Ad esempio, possibili punteggi di vittoria di un game sono 4 punti a 1, 5 a 3, 8 a 6. Un game non finisce quando il punteggio è, ad esempio, 3 punti a 0, 4 a 3, 8 a 7. Punteggi impossibili sono, ad esempio, 5 a 1, 8 a 5. I resoconti dei precedenti scontri tra Sinner e Medvedev mostrano che Sinner vince un punto con probabilità $\frac{2}{3}$ —conseguentemente Medvedev lo vince con probabilità $\frac{1}{3}$. In base ai resoconti, qual è la probabilità che Sinner vinca un game?

[Dare come risposta la probabilità moltiplicata per 10000.]

18. Decimali

Lorenzo Mazza

Si consideri la scrittura decimale $n = 101010\dots 101$ ottenuta alternando le cifre 1 e 0, con la cifra 1 presente k volte e la cifra 0 presente $k - 1$ volte, con $2 \leq k \leq 1000$. Quanti dei numeri n sono primi?

19. Un gioco

Matteo Littardi

Eva inventa un semplice passatempo: scrive alla lavagna un numero intero positivo e lo sostituisce con la somma delle sue cifre, fino ad avere una singola cifra. Giocare in base 10, però, l'annoia molto velocemente: decide allora di ripetere lo stesso gioco, sempre con lo stesso numero n , ma in basi diverse, usando eventualmente come cifre superiori alcune delle 26 lettere dell'alfabeto inglese. Se, ad esempio, deve scrivere un numero in base 11, dopo le dieci cifre usuali Eva usa la lettera A come undicesima. Se deve scrivere un numero in base 36 usa tutte le lettere dell'alfabeto inglese: così J sarà la ventesima cifra, K la ventunesima, W la trentatreesima, X la trentaquattresima, Y la trentacinquesima. Avendo un impegno, Eva interrompe il gioco e annota i risultati ottenuti su un foglio, che lascia nella stanza, e cancella tutti i calcoli sulla lavagna. Poco dopo entra Roberto, che aggiunge alcune scritte nel foglio. Sul foglio ora c'è scritto

- In base 11 ho ottenuto 6.
- In base 29 ho ottenuto 5.
- In base 7 ho ottenuto 2.
- In base 15 ho ottenuto 8.
- In base 36 ho ottenuto Z.
- In base 19 ho ottenuto 8.
- In base 13 ho ottenuto 2.

In effetti, Roberto ha inserito due righe e i risultati che ha indicato sono entrambi errati. Qual è la scrittura in base 10 del minimo numero n che Eva poteva avere utilizzato?

20. Origami

Carlo Càssola

Dato un triangolo isoscele ABC avente base di lunghezza 24 cm e lati obliqui di lunghezza 38 cm, si tracciano i punti medi M , N e P dei lati e si disegnano i tre segmenti che li congiungono. Il triangolo ABC risulta così diviso in quattro triangoli disgiunti. Piegando ABC lungo i lati di MNP , si può formare un tetraedro dato che M , N e P sono i punti medi dei lati di ABC . Qual è il volume del tetraedro in cm^3 ?

21. Somme

Fabrizio Conca

Per $n \geq 0$ sia a_n il numero di modi in cui è possibile scrivere n come somma ordinata di numeri interi positivi in modo tale che due addendi vicini non siano mai uguali. Per esempio, è chiaramente $a_1 = 1$, come pure $a_2 = 1$. Del resto, 5 può essere scritto come

$$5 \quad 1+4 \quad 4+1 \quad 2+3 \quad 3+2 \quad 2+1+2 \quad 1+3+1$$

ma non come $1+1+3$ o $1+2+2$: quindi $a_5 = 7$. Alcuni altri valori di a_n sono $a_9 = 71$, $a_{10} = 124$, $a_{11} = 214$, $a_{12} = 378$, $a_{13} = 661$, e $a_{14} = 1152$. Ma quanto vale a_{15} ?