Gara a Squadre Locale (1/3/24)

Sam

In quanto organizzatore di una sede locale (Milano), ho ricevuto il testo della gara il giorno prima e ho speso un paio d'ore la sera del giorno prima a provare la gara. Ammetto di non aver azzeccato tutti i calcoli e qualcuno l'ho corretto a posteriori dopo aver avuto la lista delle risposte corrette.
Un paio di commenti generali, a seguito di una lettura completa della gara, prima di aver tentato di fare alcunché.

Ad una prima lettura, i problemi 1,2,6,8,14,15 non sembrano presentare particolari problemi, se non eventualmente il calcolo del risultato e sono, con buona ragione, i primi da attaccare, almeno da una parte della squadra.
Almeno personalmente, i problemi 3,4,5,7,9,11,12,16 sembrano poter cedere davanti a tecniche standard e quindi non sono buoni candidati a jolly, a meno che nessuno degli problemi restanti dia ragionevoli speranze.
Il problema 13 è di geometria; al contrario del 16, non rivela subito quale potrebbe essere la tecnica risolutiva, ma forse spendendo 5 minuti a fare il disegno e a segnare qualche angolo se ne ricava qualcosa di più.
Il problema 18 sembra avere un trucco: è difficilissimo dire che un numero è primo, dunque ci sarà qualcosa per dire che tutti da un certo punto in poi sono composti.
Il problema 19 ha un testo molto lungo, ma dopo una prima lettura sembra un problema di congruenze rispetto a vari moduli, probabilmente una lunga applicazione del teorema cinese del resto.
I problemi 10, 17, 20, 21 sembrano i più tosti, candidati jolly per una squadra forte, senza però sopravvalutarsi.
Di seguito trovate le soluzioni; non è detto che siano le soluzioni ufficiali o le più eleganti. A volte ho indicato esplicitamente i conti, per dare un'idea di come li ho svolti (cercando di minimizzare la quantità di calcoli o almeno cercando la strada in cui credevo di sbagliarne meno). I risultati numerici sono però quelli corretti!

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1 Beh, sono due figure geometriche parzialmente sovrapposte e sappiamo che la parte sovrapposta ha area 20π; singolarmente, le due figure (che sono cerchi di raggi 10 e 50) hanno area 100π e 2500π. Dunque l'area totale coperta da entrambe è $100\pi + 2500\pi - 20\pi = 2580\pi \approx 2580 \cdot 3.1415 = 8105.07$ e dunque la risposta è $\boxed{8105}$.
Attenti: Scordare di moltiplicare per π è una comune fonte di errore (e quindi consegnare 2580).

Esercizio 2 Ricordiamo, dall'anno scorso, che $2023 = 7 \cdot 17^2$ e inoltre si vede subito che $112 = 4^2 \cdot 7$: dunque

$$(\sqrt{2023} + \sqrt{112})^2 = 2023 + 112 + 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 17 = 2135 + 952 = \boxed{3087}\,.$$

Esercizio 3 L'esercizio 3 è chiaramente più complesso dei primi due, sembra richiedere di calcolare a, b, c, quando in realtà, a ben vedere, ne chiede il prodotto; cerchiam dunque di esprimere lui in termini dei dati. I dati sono

$$ab = c^2 \qquad a + b + c = 102 \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{17}{18}$$

e dalla prima possiamo ottenere $c^3 = abc = ab\sqrt{ab}$, mentre dall'ultima abbiamo (usando la prima e la seconda)

$$\frac{ab + bc + ca}{abc} = \frac{17}{18} \Rightarrow ab + c(a + b) = \frac{17}{18}abc \Rightarrow c(a + b + c) = \frac{17}{18}abc \Rightarrow ab = \frac{102 \cdot 18}{17}$$

da cui

$$abc = ab\sqrt{ab} = \frac{102 \cdot 18}{17}\sqrt{\frac{102 \cdot 18}{17}} = 648\sqrt{3} \approx 648 \cdot 1.7321 = 1122.4008$$

e dunque la risposta è $\boxed{1122}$.

Esercizio 4 A prima vista uno potrebbe pensare al teorema cinese del resto, ma non è così semplice: chiamiamo a l'età del nipote e b quella del nonno. Dobbiamo avere che a divide b, che $a + 1$ divide $b + 1$, che $a + 2$ divide $b + 2$ etc fino a $a + 5$ divide $b + 5$.

Si nota subito che i moduli che vorremo usare non sono per forza coprimi tra loro, a e $a + 2$, o $a + 1$ e $a + 3$, o a e $a + 3$ possono avere fattori comuni. Vediamo di fare le cose uno step alla volta (è noioso, ma è la GaS...).

$a \mid b$ vuol dire $\equiv 0 \bmod a$, cioè $b = ka$ (con $k \neq 1$ perché non hanno la stessa età) e $a + 1$ divide $b + 1$ vuol dire $(b + 1) \equiv 0 \bmod a + 1$, cioè $ka \equiv -1 \bmod (a + 1)$, cioè $-k \equiv -1 \bmod (a + 1)$, cioè $k = 1 + k_1(a + 1)$. Quindi

$$b = a + k_1 a(a + 1) \ .$$

E fin qui è quello che si ottiene con il TCR; ma ora $b + 2 \equiv 0 \bmod a + 2$ ci dice che

$$a + k_1 a(a + 1) \equiv -2 \bmod (a + 2) \Rightarrow k_1 a(a + 1) \equiv 0 \bmod (a + 2)$$

il che implica $k_1 \equiv 0 \bmod a'$ dove $a' = a + 2$ se a è dispari e $(a + 2)/2$ se a è pari, poiché $(a, a + 2) = (a, 2)$. Dunque si avrà

$$b = a + k_2 \mathrm{mcm}(a, a + 1, a + 2) \ .$$

Proseguendo allo stesso modo si ottiene alla fine

$$b = a + k_5 \mathrm{mcm}(a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4, a + 5) \ .$$

Dobbiamo avere $b > 100$ e inoltre si ha $b > a + a(a + 1)(a + 2)/2$; ponendo $a = 1$ otteniamo $b = 1 + k_5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 1 + k_5 60$ e dunque come minimo $b = 121$. Ora abbiamo due possibilità: provare a consegnare 0121 e vedere come va, oppure dimostrare che è il minimo possibile.

Di certo si ha $a < 6$ poiché per $a \geq 6$, si ha $b > a + a(a + 1)(a + 2)/2 > 6 + 168 = 174 > 121$. Proviamo

$$a = 2 \Rightarrow 2 + \mathrm{mcm}(2, 3, 4, 5, 6, 7) = 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 212 > 121$$

$$a = 3 \Rightarrow 3 + \mathrm{mcm}(3, 4, 5, 6, 7, 8) = 3 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 = 3 + 840 > 121$$

$$a = 4 \Rightarrow 4 + \text{mcm}(4,5,6,7,8,9) = 4 + 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 > 1000$$
$$a = 5 \Rightarrow 5 + \text{mcm}(5,6,7,8,9,10) = 5 + 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 > 1000\ .$$

Dunque effettivamente la risposta è $\boxed{0121}$.

Esercizio 5 Il numero che cerchiamo è $2xyz$ e $2 + x + y + z \equiv 0 \bmod 9$. Sapendo x, y, abbiamo univocamente determinato il resto di z nella divisione per 9 e l'unico resto che non determina univocamente una cifra tra 0 e 9 è appunto 0, che corrisponde sia a 0 che a 9, quindi, se Dante non sa indovinare il PIN, vuol dire che il numero è della forma $2xy0$ (poiché Marta sa che è pari e dunque non può finire per 9).
A questo punto dobbiamo solo trovare il più grande numero di quella forma che sia divisibile per 9, ovvero $\boxed{2970}$.

Esercizio 6 Chiamiamo V il vertice e A, B i suoi secondi vicini. Allora abbiamo che $\widehat{AVB}$ sottende un arco che comprende 55 lati del 59-agono regolare. Un lato è sotteso dall'angolo di ampiezza $\dfrac{180°}{59}$ e dunque
$$\widehat{AVB} = 55\frac{180°}{59} = 167.796\ldots°$$
ovvero la risposta è $\boxed{0167}$.

Esercizio 7 Dobbiamo contare le soluzioni dell'equazione $a+2b+11c = 79$ in cui a, b, c sono interi non negativi (possono essere 0!). Ora, in generale questo è un problema abbastanza macchinoso, ma nel nostro caso abbiamo 11 che è nettamente più grande degli altri due coefficienti e paragonabile al termine noto. Dividiamo dunque il problema in casi:

($c = 0$) Dobbiamo risolvere $a+2b = 79$, quindi b può prendere ogni valore tra 0 e $78/2 = 39$ e per ogni tale valore possiamo determinare univocamente a. Quindi abbiamo 40 soluzioni (ricordatevi lo 0!) del tipo $(a, b, 0)$.

($c = 1$) Dobbiamo risolvere $a + 2b = 68$, quindi b può prendere ogni valore tra 0 e $68/2 = 34$, quindi abbiamo 35 soluzioni del tipo $(a, b, 1)$.

($c = 2$) Partendo da $a + 2b = 57$ avremo $56/2 + 1 = 29$ soluzioni

($\cdots$) Il numero di soluzioni cala di volta in volta di 5 e poi di 6 (a seconda che c passi da pari a dispari o da dispari a pari).

Dunque, il numero totale di soluzioni è
$$(40 + 29 + 18 + 7) + (35 + 24 + 13 + 2) = \frac{1}{2}(4 \cdot 47 + 4 \cdot 37) = 2 \cdot 84 = 168$$
e dunque la risposta è $\boxed{0168}$.

Esercizio 8 Qui di ragionamento ce n'è poco e basta enumerare i casi:

- I numeri tra 1 e 9 sono 9 ed ognuno ha 1 cifra $(9 \cdot 1)$
- I numeri tra 10 e 99 sono 90 ed ognuno ha 2 cifre $(90 \cdot 2)$
- I numeri tra 100 e 999 sono 900 ed ognuno ha 3 cifre $(900 \cdot 3)$

- I numeri tra 1000 e 9999 sono 9000 ed ognuno ha 4 cifre $(9000 \cdot 4)$
- Il numero 10000 è 1 ed ha 5 cifre $(1 \cdot 5)$.

Sommiamo

$$9 + 180 + 2700 + 36000 + 5 = 38894$$

e dunque la risposta è $\boxed{8894}$.

Esercizio 9 Il problema descrive un rettangolo di cui sappiamo il perimetro, cioè $124 + 4 = 128$ (perché la piastrella nell'angolo copre 1dm sia su un lato che sull'altro), e ci chiede di massimizzarne l'area (in realtà, di massimizzare l'area meno 1000, ma è la stessa cosa). Come è ben noto, se $a + b$ è fissato, il massimo di ab è ottenuto quando $a = b$; dunque la figura è un quadrato con lato dato da $128 = 4\ell$, ovvero $\ell = 32$ e dunque l'area è $\ell^2 = 2^{10} = 1024$ ovvero, mancano $\boxed{0024}$ piastrelle.

Esercizio 10 Se indichiamo con a_1, b_1, c_1 le cifre delle unità e a_2, b_2, c_2 le cifre delle decine, dobbiamo avere

$$10a_2 + a_1 + 10b_2 + b_1 = 10c_1 + c_2$$

$$10a_2 + a_1 + 10c_2 + c_1 = 10b_1 + b_2$$

$$10b_2 + b_1 + 10c_2 + c_1 = 10a_1 + a_2$$

e dalle prime due otteniamo, per differenza, $11(b_2 - c_2) = 11(c_1 - b_1)$ ovvero $b_2 + b_1 = c_2 + c_1$ e cicliche. La somma delle prime due equazioni, invece, dà $20a_2 + 2a_1 = 9(c_1 - c_2 + b_1 - b_2)$ il che implica che $10a_2 + a_1$ è multiplo di 9 (e cicliche). Dunque $a_1 = 9 - a_2$, $b_1 = 9 - b_2$ e $c_1 = 9 - c_2$; allora, ponendo $a_2 = a$, $b_2 = b$, $c_2 = c$, abbiamo $9(a + 1) + 9(b + 1) = 9(10 - c)$ e cicliche; notiamo che tutte e tre le equazioni si riducono a $9a + 9b + 9c = 72$ ovvero $a + b + c = 8$. Dobbiamo contarne le soluzioni intere positive ed ognuna di loro ci darà una soluzione al problema originale; queste sono le soluzioni non negative di $a' + b' + c' = 5$, che sono

$$\binom{5+2}{2} = 21 .$$

Dunque, la risposta è $\boxed{0021}$.

Esercizio 11 Togliamo la storiella: quante sono le terne (a, b, c) tali che $a + b = c$ oppure $a + c = b$ oppure $b + c = a$, con $a,\ b,\ c \in \{1, \ldots, 100\}$?
Ovviamente i tre casi sono tra loro incompatibili. Contiamo dunque quante sono le terne in cui $a + b = c$; fissati a, b, c è unico, se esiste, ed esiste se e solo se $a + b \leq 100$. Dunque tali terne sono tante quante le coppie (a, b) con $1 \leq a, b \leq 100$ e $a + b \leq 100$; ovvero stiamo contando i punti a coordinate intere nel triangolo di vertici $(1, 99), (99, 1), (1, 1)$. L'area di tale triangolo è $(98)^2/2$, ma, per il teorema di Pick è anche $I + B/2 - 1$ dove I è il numero di punti a coordinate intere interni al triangolo, B è il numero di punti a coordinate intere sul perimetro (che sono $3 \cdot 98$) e dunque

$$I = 98 \cdot 49 - 3 \cdot 49 + 1 = 95 \cdot 49 + 1 = 4656$$

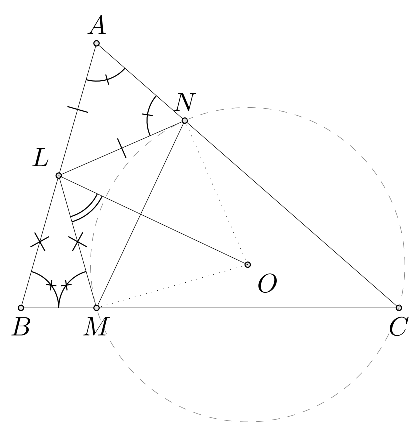
quindi i punti che ci interessano sono $I + B = 4950$.
In conclusione, la probabilità che ci interessa è $3 \cdot 4950/100^3$, dunque moltiplicando per 100^2 otteniamo $3 \cdot 4950/100 = 3 \cdot 49.50 = 148.5$. La risposta è $\boxed{0148}$.

Esercizio 12 Una volta scelti i tre numeri che stanno, ad esempio, a destra di 9, c'è un solo modo di ordinarli in maniera decrescente da 9 verso destra; allo stesso modo nelle altre due direzioni. Quindi i modi di disporre i numeri nel modo richiesto sono i modi di dividere le cifre da 0 a 8 in 3 sottoinsiemi da 3, contando anche l'ordine dei sottoinsiemi (una volta fatto, c'è un solo modo di disporli). Dunque

$$\binom{9}{3}\binom{6}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 21 \cdot 80 = 1680\ .$$

La risposta è dunque $\boxed{1680}$.

Esercizio 13 Facendo il disegno, notiamo una cosa: posso mettere L dove voglio e poi costruire di conseguenza M e N (almeno, in un triangolo non rettangolo); questo vuol dire che non ci sarà alcuna proprietà "particolare" del triangolo LMN che ci possa venire in aiuto (e, probabilmente, il numero 42 non sarà particolarmente significativo).



Tracciamo una figura con tutto il necessario.
Quello che ci dicono le ipotesi è che conosciamo l'angolo $\widehat{ACB} = \widehat{NCM}$ e dunque conosciamo anche l'angolo $\widehat{NOM} = 2\widehat{NCM}$.
Inoltre, i due triangoli isosceli ci dicono che

$$\widehat{MLN} = 180° - \widehat{MLB} - \widehat{NLA} = 180° - (180° - 2\widehat{LAN}) - (180° - 2\widehat{LBM}) = 2\hat{A} + 2\hat{B} - 180° = 180° - 2\hat{C}\ .$$

Quindi $\widehat{NOM} + \widehat{NLM} = 180°$, ovvero $NOML$ è un quadrilatero ciclico. Da cui $\widehat{OLM} = \widehat{ONM} = 90° - \widehat{NCM} = 48°$.
La risposta è $\boxed{0048}$.

Esercizio 14 Due pagine fronte-retro hanno numeri consecutivi e dunque la somma dei due è un dispari, scriviamo $2x+1$. La sommma di tutti i numeri di pagina di un libro è $n(n+1)/2$, dunque abbiamo

$$\frac{n(n+1)}{2} = 22000 + 2x + 1$$

e in particolare $n(n+1) > 44000$; di sicuro $n > 200$, ma vediamo che $(200+k)^2 = 40000 + 400k + k^2$ e dunque

$$40000 + 400k + k^2 + 200 + k > 44000 \Leftrightarrow k^2 + 401k - 3800 > 0$$

che è verificata per $k = 10$ (come si vede subito), mentre $81 + 3609 - 3800 < 0$, quindi $n(n+1) > 44000$, con n naturale, se e solo se $n \geq 210$
Vediamo che con $n = 210$

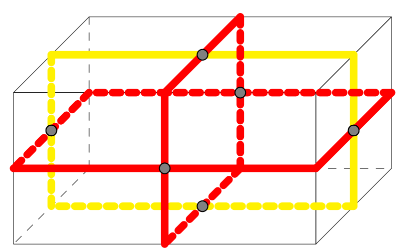
$$n(n+1)/2 = 105 \cdot 211 = 22155 = 22000 + 2x + 1$$

con $x = 77$, che è un numero di pagina possibile in quanto minore di 210. Avendo trovato una soluzione, non c'è bisogno di cercarne altre, perché il testo ci dice già che la soluzione è unica (la domanda non è "quante pagina al massimo o al minimo", ma è "quante pagine" e dunque suppone che ci sia una sola risposta possibile).
Vediamo per completezza che le condizioni per cui un certo n è valido sono

$$0 < n(n+1) - 44000 < 4(n-1) + 2 = 4n - 2$$

ovvero $209 < n < 212$, ma $n = 211$ non è accettabile poiché darebbe $366 = 2x + 1$ che è impossibile nei naturali.
Dunque la risposta è $\boxed{0155}$.

Esercizio 15 Vediamo di capire come è fatto questo pacchetto.

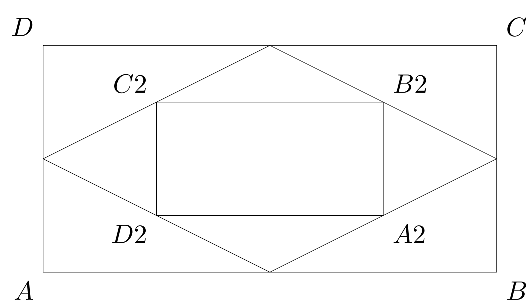


Abbiamo segnato in grigio dove i due nastri si sovrappongono. L'area coperta singolarmente dai nastri è, per quello rosso, $3 \times 2(50 + 30 + 30 + 25)$ (spessore per somma dei perimetri dei rettangoli rossi) e, per quello giallo, $7 \times 2(50 + 25)$ (spessore per la il perimetro del rettangolo giallo). Inoltre, i punti grigi corrispondono a 4 rettangoli 3×7 e 2 rettangoli 3×3 coperti da entrambi i nastri. Dunque l'area totale coperta da almeno un nastro è

$$6 \cdot 135 + 14 \cdot 75 - 4 \cdot 21 - 3 \cdot 9 = 1758$$

e, visto che la superficie totale della scatola è 7000, la superficie non coperta dai nastri è $\boxed{5242}$.

Esercizio 16 Guardiamo il disegno.



Si vede subito che i quadrilateri $ABCD$ e $A_2B_2C_2D_2$ sono omotetici; questo è subito evidente scrivendo i punti in coordinate cartesiane o con i vettori, mettendo l'origine nell'intersezione delle diagonali (di modo che $A+C=0$ e $B+D=0$):

$$A_1 = \frac{A+B}{2} \qquad \text{e cicliche}$$

e dunque

$$A_2 = \frac{A_1+B_1}{2} = \frac{A+B+B+C}{4} = \frac{B}{2} \qquad \text{e cicliche .}$$

Dunque il perimetro di $A_2B_2C_2D_2$ è la metà di quello di $ABCD$; notiamo che non serve che $ABCD$ sia un rettangolo, basta che le sue diagonali si bisechino, ovvero che sia un parallelogramma.
Vediamo che $A_1+C_1 = (A+B+C+D)/2 = B_1+D_1$ e dunque $A_1B_1C_1D_1$ è un parallelogramma. Quindi sarà vero che il perimetro di $A_3B_3C_3D_3$ è la metà di quello di $A_1B_1C_1D_1$ e, proseguendo così, il perimetro di $A_{11}B_{11}C_{11}D_{11}$ sarà $1/32$ del perimetro di $A_1B_1C_1D_1$.
Infine, $A_1-B_1 = (A-C)/2$ e cicliche, dunque il lato A_1B_1 è la metà della diagonale AC, che è lunga $24\sqrt{5}$; quindi il perimetro di $A_1B_1C_1D_1$ è $48\sqrt{5}$ e di conseguenza il perimetro di $A_{11}B_{11}C_{11}D_{11}$ è

$$\frac{48}{32}\sqrt{5} = \frac{3}{2}\sqrt{5} \approx 1.5 \cdot 2.2360 = 3.354$$

in metri. In millimetri, si ottiene $\boxed{3354}$.

Esercizio 17 Elencare tutte le possibili vittorie non sembra una buona strategia: sono infinite. Ci sono due casi di vittoria: arrivando a 4 con un distacco più grande di 2 o arrivando al punteggio $(n+2,n)$ con $n \geq 2$.
Esaminiamo il secondo, che produce infinite configurazioni possibili; vediamo subito che i due precedenti punteggi devono essere

$$(n,n) \to (n+1,n) \to (n+2,n)$$

e quindi dobbiamo arrivare da una posizione di pareggio. Allo stesso modo, la posizione di pareggio deve provenire da $(n-1,n-1)$ (se $n>3$) con uno dei due percorsi

$$(n-1,n-1) \to (n,n-1) \to (n,n) \qquad \text{oppure} \qquad (n-1,n-1) \to (n-1,n) \to (n,n) \; .$$

Dunque, se p è la probabilità che Sinner segni un punto e se chiamiamo x la probabilità che, a partire da una situazione di pareggio, Sinner vinca il game, abbiamo

$$x = p^2 + 2p(1-p)x \Rightarrow x = \frac{p^2}{1-2p(1-p)} \; .$$

Ora, facciamo a mano i casi $n \leq 3$:

- la probabilità che Sinner vinca $(4,0)$ è p^4
- la probabilità che Sinner vinca $(4,1)$ è $4p^4(1-p)$ (il punto di Medvedev può essere prima di un qualunque punto di Sinner, ma non dopo l'ultimo, quindi 4 configurazioni possibili)
- la probabilità che Sinner vinca $(4,2)$ è $10p^4(1-p)^2$ (i due punti di Medvedev possono essere dovunque tranne che dopo l'ultimo punto di Sinner, quindi abbiamo $\binom{5}{2}$ configurazioni possibili

- la probabilità che arrivino a $(3,3)$ è $\binom{6}{3}p^3(1-p)^3$.

Dunque, la probabiltà che Sinner prima o poi vinca è

$$p^4 + 4p^4(1-p) + 10p^4(1-p)^2 + \frac{20p^5(1-p)^3}{1-2p(1-p)} \ .$$

Sostituendo $p = 2/3$, otteniamo

$$\frac{3^2 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^4 \cdot 3 + 10 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^5}{3^6} = \frac{144 + 192 + 160 + 128}{3^6} = \frac{208}{243} \approx 0.85596$$

e dunque la risposta è $\boxed{8559}$.

Esercizio 18 Intanto, visto che non c'è modo che non sia il controllo diretto di determinare se un numero è primo, molto probabilmente si riuscirà a vedere che, da un certo punto in poi, tutti quei numeri sono composti (altrimenti è un esercizio noioso e sadico).
Vediamo che per $k = 2$ abbiamo il numero 101, che è primo. Cerchiamo un modo di scrivere i nostri numeri e subito (?) ci accorgiamo che il numero contenente k cifre 1 è

$$\frac{10^{2k} - 1}{99} = \frac{(10^k - 1)(10^k + 1)}{99} \ .$$

Ora, $10^k - 1$ è sempre multiplo di 9, ma non è 9, se $k \geq 2$; inoltre, se k è pari, $10^k - 1$ è anche multiplo di 11 (perché ha un numero pari di cifre, tutte uguali), ma se $k \geq 4$ abbiamo $10^k - 1 > 99$, mentre se k è dispari $10^k + 1$ è multiplo di 11 (ma se $k \geq 3$ è maggiore di 11).
Quindi, se k è pari e maggiore o uguale a 4, abbiamo la fattorizzazione

$$\frac{10^k - 1}{99}(10^k + 1)$$

con due fattori non banali; se invece k è dispari e maggiore o uguale a 3, abbiamo la fattorizzazione

$$\frac{10^k - 1}{9}\frac{10^k + 1}{11}$$

con due fattori non banali. Quindi l'unico numero primo è 101 e la risposta è $\boxed{0001}$.

Esercizio 19 Preso un numero n in base b, continuando a sommare le sue cifre finché non se ne ottiene una sola, si finisce con l'elemento dell'insieme $1, \ldots, b-1$ che è congruo a n mod$b - 1$. Dunque le condizioni date si traducono con

$$\begin{cases} n \equiv 6 \text{ mod } 10 \\ n \equiv 0 \text{ mod } 28 \\ n \equiv 2 \text{ mod } 6 \\ n \equiv 8 \text{ mod } 14 \\ n \equiv 0 \text{ mod } 35 \\ n \equiv 8 \text{ mod } 18 \\ n \equiv 2 \text{ mod } 12 \end{cases}$$

Usando il teorema cinese del resto, questo sistema è equivalente a

$$\begin{cases} n \equiv 2 \bmod 5 \\ n \equiv 0 \bmod 2 \\ n \equiv 0 \bmod 4 \\ n \equiv 0 \bmod 7 \\ n \equiv 2 \bmod 3 \\ n \equiv 0 \bmod 2 \\ n \equiv 0 \bmod 2 \\ n \equiv 1 \bmod 7 \\ n \equiv 0 \bmod 5 \\ n \equiv 0 \bmod 7 \\ n \equiv 0 \bmod 2 \\ n \equiv 0 \bmod 9 \\ n \equiv 2 \bmod 4 \\ n \equiv 2 \bmod 3 \end{cases}$$

Vediamo che le condizioni nei moduli 2, 5, 7 sono contraddittorie; tali contraddizioni si risolvono eliminando la seconda e la quinta riga del sistema originale (oppure la prima, la quarta e la settima, ma ve ne sono solo due errate). Dunque ci riduciamo a

$$\begin{cases} n \equiv 2 \bmod 4 \\ n \equiv 1 \bmod 5 \\ n \equiv 1 \bmod 7 \\ n \equiv 8 \bmod 9 \end{cases}$$

dove la seconda e la terza equazione subito dicono che $n \equiv 1 \bmod 35$; inoltre visto che $35 \equiv 3 \bmod 4$, si deve avere $n = 1 + (4k - 1)35$, per soddisfare la prima. L'ultima impone che

$$1 + (4k - 1)35 + 1 \equiv 0 \bmod 9 \Leftrightarrow 3 + 5k \equiv 0 \bmod 9 \Leftrightarrow k \equiv -6 \bmod 9$$

e dunque $n = 1 - 25 \cdot 35 + 35 \cdot 24h$ che per $h = 0$ è negativo, ma per $h = 1$ dà la risposta voluta: $\boxed{0386}$.

Esercizio 20 Per fissare la notazione, supponiamo che AM, BN, CP siano le mediane; immaginando di piegare il triangolo come descritto, notiamo che A si muoverà sul piano passante per A e ortogonale alla retta NP (e così gli altri vertici), dunque la proiezione di A sul piano di partenza sarà la retta per A ortogonale a NP, che è l'altezza da A (poiché $NP \parallel BC$). Allo stesso modo anche le proiezioni di B e C si muoveranno sulle rispettive altezze; questo vuol dire che, se il tetraedro si chiude, la proiezione del quarto vertice V (a cui arrivano A, B, C con le pieghe descritte) sul piano di partenza sarà l'ortocentro di ABC.
Supponiamo che $AB = AC$, sia H l'ortocentro e sia M' il punto medi di NP, allora A, M', H, M sono allineati e si ha

$$VH^2 = AM'^2 - M'H^2 \; .$$

Abbiamo che $AM = \sqrt{38^2 - 12^2} = 10\sqrt{13}$ e dunque $AM' = 5\sqrt{13}$; serve solo calcolare AH. Se consideriamo il punto H'' in cui AH incontra nuovamente la circoscritta ad ABC, abbiamo che $HM = MH''$ e poiché ABD è isoscele, AH'' è un diametro, dunque $BM^2 = AM \cdot MH''$ per il secondo teorema di Euclide. Quindi

$$HM = MH'' = \frac{72}{5\sqrt{13}} \Rightarrow AH = 10\sqrt{13} - \frac{72}{5\sqrt{13}} = \frac{650-72}{5\sqrt{13}} = \frac{578}{5\sqrt{13}}$$

e

$$M'H = AH - AM' = \frac{578-325}{5\sqrt{13}} = \frac{253}{5\sqrt{13}}$$

dunque

$$VH^2 = 325 - \frac{(253)^2}{325} = \frac{325^2 - 253^2}{325} = \frac{72 \cdot 578}{325} = \frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 17^2}{325}$$

cioè

$$VH = \frac{4 \cdot 3 \cdot 17}{5\sqrt{13}} = \frac{204}{5\sqrt{13}} \; .$$

Quindi il volume cercato è

$$\frac{1}{3}VH \cdot \frac{1}{8}BC \cdot AM = \frac{1}{24}\frac{204 \cdot 24 \cdot 10\sqrt{13}}{5\sqrt{13}} = 17 \cdot 24 = 408 \; .$$

Abbiamo calcolato l'area di base, cioè l'area di MNP, come $1/4$ dell'area di ABC. La risposta dunque è $\boxed{0408}$.

Esercizio 21 Ci sono forse strategie migliori, ma notiamo che il testo ci ha dato molti valori di a_n ... quindi potremmo provare a scrivere a_{15} in funzione dei precedenti! Indichiamo con a_0 il numero di modi di scrivere 0 (e ce n'è uno solo).
Allora:

0. il numero di modi di scrivere 15 usando come ultimo numero (più a destra) 15 stesso sarà a_0;
1. il numero di modi di scrivere 15 usando come ultimo numero 14 sarà a_1;
2. il numero di modi di scrivere 15 usando come ultimo numero 13 sarà a_2;
3. il numero di modi di scrivere 15 usando come ultimo numero 12 sarà a_3;
4. il numero di modi di scrivere 15 usando come ultimo numero 11 sarà a_4;
5. il numero di modi di scrivere 15 usando come ultimo numero 10 sarà a_5;
6. il numero di modi di scrivere 15 usando come ultimo numero 9 sarà a_6;
7. il numero di modi di scrivere 15 usando come ultimo numero 8 sarà a_7.

E fino a qui non c'era rischio che l'ultimo numero fosse uguale al precedente.
Il numero di modi di scrivere 15 usando come ultimo numero 7 sarà il numero di modi di scrivere 8 meno il numero di modi di scrivere 8 finendo con 7, che è il numero di modi di scrivere 1, dunque sarà $a_8 - a_1$.
Il numero di modi di scrivere 15 usando come ultimo numero 6 sarà il numero di modi di scrivere 9 meno il numero di modi di scrivere 9 finendo con 6, che è il numero di modi di scrivere 3, dunque sarà $a_9 - a_3$.

Il numero di modi di scrivere 15 usando come ultimo numero 5 sarà il numero di modi di scrivere 10 meno il numero di modi di scrivere 10 finendo con 5; quest'ultimo è il numero di modi di scrivere 5 meno il numero di modi di scrivere 5 usando come ultimo numero 5, cioè $a_5 - a_0$, quindi il numero che cerchiamo è $a_10 - a_5 + a_0$.
Il numero di modi di scrivere 15 usando come ultimo numero 4 sarà $a_11 - a_7 + a_3$.
Il numero di modi di scrivere 15 usando come ultimo numero 3 sarà $a_12 - a_9 + a_6 - a_3 + a_0$.
Il numero di modi di scrivere 15 usando come ultimo numero 2 sarà $a_13 - a_11 + a_9 - a_7 + a_5 - a_3 + a_1$.
Il numero di modi di scrivere 15 usando come ultimo numero 1 sarà $a_{14} - a_{13} + a_{12} - a_{11} + a_{10} - a_9 + a_8 - a_7 + a_6 - a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0$.
Dunque

$$a_15 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + (a_8 - a_1) + (a_9 - a_3) + (a_{10} - a_5 + a_0) + (a_{11} - a_7 + a_3)+$$
$$+(a_{12} - a_9 + a_6 - a_3 + a_0) + (a_{13} - a_{11} + a_9 - a_7 + a_5 - a_3 + a_1)+$$
$$+(a_{14} - a_{13} + a_{12} - a_{11} + a_{10} - a_9 + a_8 - a_7 + a_6 - a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0) =$$
$$= 4a_0 + 2a_2 - 2a_3 + 2a_4 + 3a_6 - 2a_7 + 2a_8 + 2a_{10} - a_{11} + 2a_{12} + a_{14}\ .$$

Dobbiamo quindi calcolare a_3, a_4, a_6, a_7, a_8, che si può fare a mano (usando sempre il ragionamento di sopra, da 6 in poi):

- (a_3) Abbiamo le somme 3, $1 + 2$, $2 + 1$, quindi $a_3 = 3$
- (a_4) Abbiamo le somme 4, $1 + 3$, $3 + 1$, $1 + 2 + 1$ quindi $a_4 = 4$
- (a_6) Abbiamo le somme che terminano per 1 (ottenute da quelle per 5 che non terminano in 1) $5 + 1$, $1 + 4 + 1$, $3 + 2 + 1$, $2 + 3 + 1$, $2 + 1 + 2 + 1$, le somme che terminano per 2 (da quelle per 4 che non terminano per 2) $4 + 2$, $1 + 3 + 2$, $3 + 1 + 2$, $1 + 2 + 1 + 2$, le somme che terminano per 3 (da quelle per 3 che non terminano per 3) $1 + 2 + 3$, $2 + 1 + 3$, le somme che terminano per 4 (da quelle per 2) $2 + 4$ e le somme che terminano per 5 (da quelle per 1) $1 + 5$ e poi 6. Quindi $a_6 = 14$.
- (a_7) Abbiamo le somme che terminano per 1 (da quelle per 6 che non terminano per 1) $4+2+1$, $1 + 3 + 2 + 1$, $3 + 1 + 2 + 1$, $1 + 2 + 1 + 2 + 1$, $1 + 2 + 3 + 1$, $2 + 1 + 3 + 1$, $2 + 4 + 1$, $1 + 5 + 1$, $6+1$, le somme che terminano per 2 (da quelle per 5 che non terminano per 2) $5+2$, $1+4+2$, $4 + 1 + 2$, $2 + 3 + 2$, $1 + 3 + 1 + 2$, le somme che terminano per 3 (da quelle per 4 che non terminano per 3) $4 + 3$, $3 + 1 + 3$, $1 + 2 + 1 + 3$, le somme che terminano per 4 (da quelle che terminano per 3) $3 + 4$, $1 + 2 + 4$, $2 + 1 + 4$, le somme che terminano per 5, $2 + 5$, le somme che terminano per 6, $1 + 6$, le somme che terminano per 7, 7. Quindi $a_7 = 23$.
- (a_8)Abbiamo le somme che terminano per 1 (da quelle per 7 che non terminano per 1) $5+2+1$, $1+4+2+1$. $4+1+2+1$, $2+3+2+1$, $1+3+1+2+1$, $4+3+1$, $3+1+3+1$, $1+2+1+3+1$, $3 + 4 + 1$, $1 + 2 + 4 + 1$, $2 + 1 + 4 + 1$, $2 + 5 + 1$, $1 + 6 + 1$, $7 + 1$, le somme che terminano per 2 (da quelle per 6 che non terminano per 2) $5 + 1 + 2$, $1 + 4 + 1 + 2$, $3 + 2 + 1 + 2$, $2 + 3 + 1 + 2$, $2 + 1 + 2 + 1 + 2$, $1 + 2 + 3 + 2$, $2 + 1 + 3 + 2$, $2 + 4 + 2$, $1 + 5 + 2$, $6 + 2$, le somme che terminano per 3 (da quelle per 5 che non terminano per 3) $5+3$, $1+4+3$, $4+1+3$, $3+2+3$, $2 + 1 + 2 + 3$, $1 + 3 + 1 + 3$, le somme che terminano per 4 (da quelle per 4 che non terminano per 4) $1 + 3 + 4$, $3 + 1 + 4$, $1 + 2 + 1 + 4$, le somme che terminano per 5, $3 + 5$, $1 + 2 + 5$, $2+1+5$, le somme che terminano per 6, $2+6$, le somme che terminano per 7, $1+7$, le somme che terminano per 8, 8. Quindi $a_8 = 39$.

Dunque $a_{15} = 4 + 2 - 6 + 8 + 42 - 46 + 78 + 248 - 214 + 756 + 1152 = 2024$ e quindi la risposta è $\boxed{2024}$.