

Gara a Squadre

Istruzioni generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Si ricorda che
 1. la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore o uguale ad x ; si scrive $[x]$ – ad esempio $[\pi] = 3$, $[10] = 10$, $[\sqrt{17}] = 4$;
 2. il successivo del numero intero n è il numero $n + 1$ e i due numeri sono detti consecutivi;
 3. un quadrato perfetto è un numero intero che è quadrato di un numero intero – ad esempio 16 è un quadrato perfetto, 22 non è un quadrato perfetto;
 4. una lista è palindroma se, letta da destra a sinistra, produce la stessa lista – ad esempio radar è palindroma; drone non è palindroma; 2020 non è palindromo; 2002 è palindromo.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo oppure il problema non ha esattamente una soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera – cioè, il resto della divisione con 10^4 ; in altre parole, in ordine da sinistra a destra, la cifra delle migliaia, seguita da quella delle centinaia, poi quella delle decine, infine le unità.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142 \quad \sqrt{3} = 1,7321 \quad \sqrt{5} = 2,2360 \quad \sqrt{7} = 2,6458 \quad \pi = 3,1415$$

POV: ti sei iscritto a Matematica in UniMiB

Un'avventura lunga (almeno) 3 anni...

Primo Anno

1. Con qualche difficoltà, hai trovato l'aula 3e14 del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Milano Biconcava, dove il prof. Davide FerrArea sta per dare il benvenuto alle matricole. “Carissimi, benvenuti! E' bello vedere quest'aula quasi stracolma ... guardate, ci sono al massimo 2 posti vuoti in ogni fila ... sapete, non ci sono tante configurazioni del genere possibili per una singola fila.” “Cosa intende, professore?” Gli chiede la segretaria del corso di laurea, la dott.ssa Paola τ oldi. “Beh, ci può essere una fila senza posti vuoti, una fila solo con il primo posto vuoto, una fila solo con il secondo posto vuoto, una fila con solo il primo e il secondo posto vuoto, una fila solo con il terzo posto vuoto, ...” “Sì, sì, ma non le dica tutte, le file sono da 16 posti, non finiamo più..” “Ma se le ho detto che non sono poi tante le configurazioni possibili per una fila!” Quante configurazioni avrebbe elencato in tutto il prof. FerrArea?

2. Scopri ben presto che, tra orientamenti, benvenuti ed accoglienze, le matricole perdono un sacco di tempo! Oggi tocca alla prof. Simona Binomi, Presidentessa della Scuola di Scienze, salutarvi e farvi perdere altre ore di lezione! “Carissimi, è un piacere essere qui ad accogliervi nella nostra Università! Sono lieta di poter dire che ogni anno sempre più studenti la scelgono, seppure resti ancora la più piccola delle tre università pubbliche milanesi (Poliedro, sTotale e Biconcava). Da un’indagine condotta su 4096 studenti, risulta che la metà abbia scelto il Poli, la metà dei restanti la sTotale, degli altri la metà abbia scelto la Biconcava; di quelli che rimanevano, la metà ha scelto ancora il Poli, la metà dei restanti la sTotale etc etc. Finché è rimasto un solo studente, che ha preferito andare a Como, all’Università dell’InfSup.” Quanti dei 4096 si sono iscritti in Biconcava?

3. Finalmente sei a lezione! Parlando dei prerequisiti del corso, la prof. Veronica Φ divaga un poco, su interi e divisibilità: “Ad esempio, per una straordinaria coincidenza, tutti i numeri di matricola degli iscritti attuali alla Laurea Triennale in Matematica rispettano queste proprietà: le prime tre cifre da sinistra formano un numero divisibile per 11, le prime quattro (sempre da sinistra) formano un numero divisibile per 25 e tutto il numero di matricola (che ha 6 cifre e non può iniziare da sinistra con uno 0) è divisibile per 4. Mi sapete dire quanti sono al massimo gli iscritti attuali alla Triennale?”

4. Nel pomeriggio, ti perdi nei meandri dell’U2 ed arrivi in ritardo alle esercitazioni con il prof. Alberto Della Virgola; caso volle che gli servisse un volontario alla lavagna proprio quel momento e chiama te. “Allora, lei non lo sa perché è appena arrivato, ma ho appena chiesto a tutti i suoi colleghi di corso qui presenti quanto lontano abitano dall’Università ed ognuno mi ha risposto un numero intero positivo di metri. La media di tutte queste distanze è scritta qui sulla lavagna ... ok, è mezza cancellata, ma qualcosa si legge: $\star\star\star,00125m$. Sa dirmi, come minimo, quanti sono i suoi colleghi presenti in quest’aula?”

5. Piazza della Scienza ha la forma di un rettangolo $ABCD$ di lati 900 e 400 attoparsec, tagliato a metà da una parallela al lato più lungo, che è la rotaia del tram 7 (ovviamente, un segmento senza spessore). Dopo lezione, esci con alcuni compagni di corso da una porta che si trova sul lato corto AD a 100 attoparsec da A e ti dirigi con loro verso un punto della rotaia del tram, ma appena arrivato su di essa, ti ricordi che in realtà volevi passare in biblioteca, la cui entrata si trova nel punto B e così ti dirigi lì. Quando arrivi, noti che, per puro caso, hai percorso il tratto più breve possibile dalla porta dove sei uscito all’entrata della Biblioteca che toccasse la rotaia. Quanto dista, in attoparsec, l’intersezione della rotaia con il lato corto AD dal punto in cui il tuo percorso ha toccato la rotaia?

6. Tempo di prove parziali. E non siete davvero andati bene. La prof. Francesca Delta Omega, delusa, vi mette in guardia “Sappiate che vi poteva andar bene la prima settimana, studiando 2 minuti, la seconda studiando 3, ma l’incremento del tempo di studio tra una settimana e la successiva è il doppio dell’incremento che c’è stato dalla precedente.” “Ma il corso dura 12 settimane!” si lamenta uno di quelli che stanno sempre in prima fila. “L’ultima settimana dovremo studiare un sacco!” Quante ore dovrete studiare, durante l’ultima settimana del corso, secondo la prof. $\delta\Omega$?

7. Ed inevitabilmente, tempo di esami. Geometria I, con il prof. Roberto Quadretti, non c’entra nulla con quello che ti aspettavi, di angoli nemmeno l’ombra, ma compatti e azioni di gruppo infestano lo scritto. C’è però un problema bonus, sul logo dell’Università: il logo contiene, ovviamente, un esagono biconcavo, cioè un esagono con i lati opposti uguali e paralleli, che ha esattamente due angoli concavi; spostando solo i due vertici di tali angoli, si può ottenere un altro esagono, ora convesso, con le stesse lunghezze dei lati. Tra tutti i possibili loghi, quello dell’università massimizza la differenza delle aree tra questi due esagoni; i due lati che concorrono nel vertice concavo sono lunghi 12,21cm e 20,72cm. Qual è la differenza tra le aree dei due esagoni, in cm^2 ?

Secondo Anno

- 8.** A mensa, vedi dall'altro lato della sala quella che è certamente la tua anima gemella. Sai che fa Fisica e nulla più, ma gli studenti di Fisica sono 750... Allora scrivi a Dotted UniMiB, descrivendo la tua crush. Postano il tuo messaggio, che riceve 250 reactions; di queste, un quinto sono di studenti di Fisica. Qual è la probabilità che la tua crush sia tra questi? Fornire la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.
- 9.** Partecipi a un bando per una collaborazione studentesca, per guadagnare qualcosa per gli aperitivi milanesi; risulti tra i vincitori e, per firmare i documenti, devi recarti nell'ufficio del dott. Bruno Normale, segretario del Dipartimento di Matematica. Il bando spiega che l'ufficio ha un numero a 4 cifre e quella più a sinistra è un 2; per trovare le altre 3, considera la soluzione positiva di $x^4 - x/5 - 1 = 0$ e chiamala α , poi calcola $\beta = \alpha^8 - 2\alpha/5$. Le tre cifre mancanti sono la parte intera di 100β . Qual è il numero di stanza del dott. Normale?
- 10.** La vita sociale migliora, ma i voti peggiorano e, per evitare un disastro al prossimo appello, cerchi di seguire un tutorato di Algebra II, tenuto da un dottorando, Andrea Binormale. Prima di lanciarsi tra domini noetheriani e moduli liberi, vi svela come sapere quanti esercizi dovreste affrontare prima dell'esame: trovate le soluzioni intere positive (a, b, c) di $ab + bc + ca = 1998$ in cui il più piccolo dei tre numeri sia 5; la somma degli interi a, b e c è il numero di esercizi.
- 11.** Per la collaborazione studentesca, vieni incaricato curare alcune pagine del sito web del Dipartimento, sotto la direzione del prof. Francesco CaraVenn. In particolare, il logo dell'Università va inserito in una configurazione particolare: sui lati di un quadrato $ABCD$ si scelgono 4 punti E su AB , F su BC , G su CD , H su DA di modo che $AE = BF = CG = DH$. Tracciando i segmenti DE, AF, BG, CH , questi formano, intersecandosi, un quadrilatero che ha area $50/61$ del quadrato originale. Quanto vale il rapporto AB/AE ?
- 12.** All'inizio del corso di Teoria della Misura, prima di spiegarti perché Lebesgue ne capiva più di Riemann, il prof. Luigi Funtore sceglie dal libro un esercizio *jolly* che, se correttamente risolto e consegnato, frutterà un bonus per l'esame. "Considerate le soluzioni intere di $2023x + 25y = 2$ " dice il prof. Funtore "e prendete quella dove è minima la quantità $|x| + |y|$. Tale minimo è il numero dell'esercizio." Quale esercizio corri a leggere?
- 13.** Doveva succedere, hai dimenticato il badge al distributore dell'acqua! Per riaverlo, alla portineria dell'U2, vogliono prima sincerarsi che tu sia davvero uno studente di Matematica. "Ho un polinomio $p(x)$ a coefficienti interi di grado 3 che vale 1 in 11, 13 e 17; sapendo che $p(19)$ è un intero positivo di 3 cifre, quanto può essere al minimo?" Che numero devi dire per riavere il tuo badge?
- 14.** In stazione a Greco Pirelli stai aspettando il solito S9 in ritardo, quando dietro di te compare il prof. Pablo Sigma che, gioviale, ti apostrofa "Ah anche lei prende questo treno? Ha notato che tutte le cifre del numero del treno (un vero numero di 5 cifre) sono diverse?" al che tu prontamente ribatti "Beh, sì prof, ma ci sono un sacco di numeri di 5 cifre con questa proprietà!" "Ah sì, in effetti sono tanti ... mi sa dire le ultime 4 cifre del loro numero?" ti chiede il prof. Σ .

Terzo Anno

15. Decidi di partecipare all'inaugurazione del nuovo Anno Accademico. La Rettrice, prof. Giovanna InannConi, vi spiega l'origine del simbolo dell'Università Bicocca: "Si tratta di un quadrato $ABCD$ dentro cui vengono scelti due punti P e Q , simmetrici rispetto al centro, e tali che APD sia isoscele con circocentro Q e viceversa BQC sia isoscele con circocentro P ." Se il lato del quadrato fosse 10000, quale sarebbe la parte intera della distanza PQ ?

16. Hai deciso con chi farai la tesi: il prof. Stefano Spigolo! Questo peculiare professore cambia ufficio ogni anno: i due piani del dipartimento di matematica sono costituiti ciascuno da quattro corridoi disposti come i lati di un quadrato e ad ogni vertice c'è una scala che porta al vertice corrispondente dell'altro piano. Il prof. Spigolo sceglie sempre un ufficio in un vertice e ogni anno sceglie a caso tra la scala e uno dei due corridoi che partono dal suo ufficio attuale, proseguendo fino al prossimo vertice. Se p è la probabilità che si trovi, dopo 25 anni (cioè dopo 25 cambi di ufficio), su un piano diverso da quello da cui è partito, qual è la parte intera di $10000p$?

17. Finalmente hai passato l'esame di Analisi Complessa, ma il prof. Stefano Media ha pubblicato numeri che non hanno senso: hai preso $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^{12}$. In realtà, scopri che il tuo voto è il minimo dell'espressione $x + y + z$ al variare di x, y, z tra i reali positivi tali che $xy^2z^3 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^{12}$. Quanto hai preso?

18. Sei al terzo piano in U5, per ricevimento studenti con il prof. Andrea Preldeali, ma c'è da aspettare. Alzando gli occhi, su un poster al muro vedi una figura con un triangolo acutangolo ABC di cui si disegna l'altezza AH , lunga $6\sqrt{3}$, e la si prolunga oltre BC fino a un punto D tale che $HD = 3\sqrt{3}$. Inoltre, $\widehat{ABH} = \widehat{HDC} = 57^\circ$. Quanto vale il prodotto delle aree di ABH e AHC ?

19. Sei in Biblioteca per cercare un libro per la tesi. Purtroppo non ti ricordi più il titolo, ma sai come ricavare il numero di catalogo. Basta considerare tutti i numeri (interi) primi $10 < p < 100$ tali che $a^2 - p^2b^2 = 2023$ abbia soluzioni (a, b) intere e fare il prodotto di tali primi. Qual è il numero di catalogo?

20. Gran giorno, oggi discuti la tesi! Presiede la commissione di Laurea la prof. Sonia Primo che, per guadagnare tempo mentre qualcuno cerca di far partire il proiettore, vi propone questo problema: "Fattorizzando 2023 otteniamo $7 \cdot 17 \cdot 17$ e scrivendo in ordine e con molteplicità questi fattori primi otteniamo 71717 che è palindromo. Quanto vale la somma dei numeri minori di 10^4 i cui fattori primi sono minori di 20 e, se scritti in ordine e con molteplicità, danno un numero di 5 cifre palindromo?" Pensateci in fretta, che il proiettore ha iniziato ad accendersi...

21. E anche la laurea l'abbiamo presa! Il Direttore del Dipartimento, prof. Gianmario Tesseratto, quest'anno ha deciso di dare un piccolo ricordo a tutti i laureati triennali: un ottaedro con le faccie colorate in 5 colori, con la regola che due faccie che abbiano in comune uno spigolo o un vertice non possono avere lo stesso colore. Quanti ottaedri diversi hanno potuto produrre? (Due ottaedri sono uguali se, ruotandone uno, si possono portare le due colorazioni a coincidere).