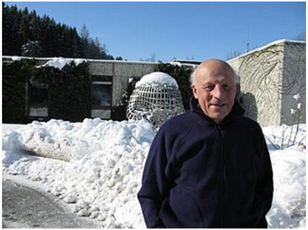
Per favore non cancellare: dialoghi matematici
Milano Bicocca, 18 gennaio 2024

Abbiamo perso le strutture? Che cos'è e cos'è diventato lo strutturalismo

1. Perché le strutture?
2. Lo strutturalismo matematico
3. Quale strutturalismo oggi?

La pratica della scienza



Pierre Cartier (1932-)

Cartier è stato membro del gruppo di matematici Bourbaki. Incarna una parte della storia matematica del XX secolo ed una certa concezione della matematica.

Idee chiavi (provvisorie)

- Preferenza del generale al particolare, dei concetti agli oggetti. Esempio chiave di concetto strutturale: struttura di gruppo = un insieme G con un prodotto

$$\cdot : G \times G \to G$$

associativo $(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$, con un'unità, ed inversi x^{-1}.
- Interesse per le analogie
- Utilità (anche pratica!) di una "cultura matematica"
- Unità della scienza

Tesi 1: il ruolo della linguistica

- Secondo una prima tesi, la linguistica è la vera origine delle strutturalismo in quanto fenomeno intellettuale e filosofico chiave del XX secolo.
- La linguistica strutturale inizia col lavoro del linguista svizzero Ferdinand de Saussure. Il suo "*Cours de linguistique générale*" fu pubblicato a titolo postumo nel 1916.
- Saussure concepisce la lingua come sistema di elementi unitari in relazioni. Queste relazioni strutturano la lingua.

Tesi 2: il ruolo della filosofia analitica

- La tesi della Stanford Encyclopedia of Philosophy (Structuralism in the Philosophy of Mathematics, 2019): *"Si ritiene che l'introduzione delle posizioni strutturaliste nella filosofia della matematica sia avvenuta negli anni '60, con le opere di Paul Benacerraf e Hilary Putnam. La tendenza si è rafforzata negli anni Ottanta e Novanta, quando Michael Resnik, Stuart Shapiro, Geoffrey Hellman e Charles Parsons entrarono in questi dibattiti che sono stati nuovamente ridisegnati negli ultimi 20 anni."*

Tesi 2: il ruolo della filosofia analitica

- Il dilemma di Benacerraf in "*What Numbers Could Not Be*" (1965):

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$$

(ordinali di von Neumann) o

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\} \ldots$$

(ordinali di Zermelo)?

Tesi 3: Lo strutturalismo come concezione della matematica

- Lo strutturalismo ha radici in una concezione globale della matematica che ha origini storiche nel primo XX secolo ma è stata veramente sviluppata solo col lavoro del gruppo Bourbaki. La dominazione di questa concezione negli anni 50-70 è poi progressivamente diminuita.
- FP, 2001, (trad. it. 2nd ed. 2017): *Il pensiero matematico contemporaneo*, Bollati Boringhieri.
- Leo Corry, 1996. *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*. Birkhaüser.

Tesi 3: Lo strutturalismo come concezione della matematica

- Tesi sempre più accettata anche nell'ambito analitico con l'introduzione di una distinzione (un po' casistica, a mio avviso) tra uno strutturalismo dei matematici e uno strutturalismo dei filosofi della matematica...
- *The Prehistory of Mathematical Structuralism*, Reck e Schiemer (eds.), 2020, Oxford University Press.

Tesi 4: Gli anni 50-70

- Lo strutturalismo: un movimento di idee transdiciplinare, complesso.
- Ampiamente francese (Louis Althusser, Roland Barthes, Michel Foucault, Jacques Lacan, Claude Lévi-Strauss...)
- Alla ricerca di metodi più sistematici, di spiegazioni strutturali (in opposizione all'esistenzialismo, al relativismo storico, sociologico...)
- Vedremo che il contesto francese spiega parzialmente i legami con lo strutturalismo di Bourbaki.

Russell-Whitehead: la logica delle relazioni

- Hume-Cantor-Frege: i numeri cardinali sono delle classi associate a relazioni (di isomorfismo):

$$|S| = \{T, \exists f : S \cong T\}.$$

- Russell-Whitehead: due tesi:
  1) la logica delle relazioni ha un senso filosofico, un senso generale per la teoria della conoscenza.
  2) Poi, un'idea meno nota: si puo edificare uno strutturalismo "numerico".

Russell-Whitehead: la logica delle relazioni

- Numero-relazione: sia $R \subset S \times S$ (dove S è un insieme), una relazione. Per esempio un'ordine totale o parziale $R(x,y) \iff x < y$.
- Il "numero" associato a R è

$$|R| = \{U \subset T \times T, \exists f : S \cong T | R(x,y) \iff U(f(x), f(y))\}.$$

- Si puó elaborare abbastanza facilmente un calcolo con questi "numeri": somma, prodotto, esponenziale (nessuno dei tre commutativo).
- Per esempio $|R| + |U|$ è il numero-relazione associato alla relazione V su $S \cup T$ dove $V_{|S} = R$, $V_{|T} = U$ e $V(x,y)$ per $x \in S, y \in T$.

Russell-Whitehead: la logica delle relazioni

- Si tratta quindi di dare una definizione delle strutture come "numeri-relazioni", partendo dal fatto che la parola struttura è "*a word which, important as it is, is never (so far as we know) defined in precise terms by those who use it. There has been a great deal of speculation in traditional philosophy which might have been avoided if the importance of structure, and the difficulty of getting behind it, had been realised*" [Russell, 1919].

Carnap, la conoscenza del mondo (1928)

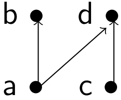
- "*Thus, our thesis, namely that scientific statements relate only to structural properties, amounts to the assertion that scientific statements speak only of forms without stating what the elements and the relations of these forms are*" [Carnap 1928].
- "*How can it be possible to give a definite description of all objects within a given object domain without indicating any one of them through an ostensive definition and without making any reference to an object outside of the given object domain?*" [Carnap 1928].

Carnap, la conoscenza del mondo

- Relazioni viste come grafi: la relazione

$$R(a,b), R(c,d), R(a,d)$$

viene interpretata come



- Due relazioni che hanno lo stesso grafo (astratto) sono "strutturalmente equivalenti".

Dalla conoscenza del mondo alle matematiche discrete e l'informatica

Tre campi "nello spirito" dello strutturalismo di Carnap:

- La teoria dei grafi (si fa risalire di solito a un articolo del 1736 di Leonhard Euler sui ponti di Königsberg),
- La teoria dei modelli che studia strutture matematiche da un punto di vista logico,
- I teoremi di dualità tra sintassi e semantica (per esempio la dualità di Alexandroff del 1937).

Le strutture di Bourbaki

- Le "strutture madri": ordini, topologie, strutture algebriche
- I concetti fondamentali della matematica moderna (dai gruppi agli spazi di Hilbert, alle algebre di Lie, ecc, ecc) sono concetti strutturali.

Lo strutturalismo di Bourbaki

Varie idee chiavi, che hanno dominato la matematica degli anni 50-70

- Ruolo organizzatore delle strutture (unità della matematica),
- Le strutture come motori del progresso,
- La potenza dell'assiomatica, della generalità,
- La richezza dei fenomeni matematici è legata alla varietà delle strutture associate.

Lo strutturalismo di Bourbaki nelle scienze umane e la cultura

- L'Oulipo di Calvino, Perec e Queneau
- Lévi-Strauss, le "*structures de la parenté*" e André Weil
- L'economia matematica e Gérard Debreu
- Piaget, la didattica e lo strutturalismo genetico.

Quale strutturalismo oggi?

Abbiamo capito i limiti delle strutture (tecniche, epistemiche, metodologiche...). Ma dove trovare oggi

- L'unità della matematica, della scienza?
- Un ideale di razionalità, un'idea di progresso (non relativistica)?
- Un ideale di organizzazione del discorso scientifico?

Bibliografia breve

- David Aubin, ≪ The withering immortality of Nicolas Bourbaki : A cultural connector at the confluence of mathematics, structuralism, and the Oulipo in France ≫, *Science in context*, 10(2) (1997).
- Paola Cantù e Frédéric Patras, ≪ Russell and Carnap or Bourbaki? Two ways towards Structures ≫. in *Logic, Epistemology, and Scientic Theories. From Peano to the Vienna Circle*, Springer, 2023.
- Leo Corry, 1996. *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*. Birkhaüser, 1996.
- Frédéric Patras, *Il Pensiero Matematico Contemporaneo*, Bollati Boringhieri (2001, trad. 2nd ed. 2017).