

**ANALISI FUNZIONALE APPLICATA ALLA SCIENZA  
DEI MATERIALI - TEMA D'ESAME DEL 5 MAGGIO  
2008**

PROF. SUSANNA TERRACINI

- 1) (a) Calcolare la serie di Fourier associata alla funzione  $2\pi$ -periodica definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ -1, & \text{se } x \in [-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

(b) Studiare la convergenza puntuale di tale serie di Fourier, con particolare riguardo ai punti  $x = \pm\pi/2$ , motivando le affermazioni dal punto di vista teorico.

(c) Trovare, sotto forma di serie di Fourier, la soluzione  $2\pi$ -periodica dell'equazione

$$y''(x) + 3y(x) = f(x).$$

- 2) (a) Dire per quali valori del parametro  $\kappa \in \mathbf{R}$  la funzione  $f(x + iy) = \kappa xy + i(x^2 - y^2)$  è olomorfa nel piano complesso;  
(b) verificare che la funzione  $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$  è armonica e determinare la sua armonica coniugata.
- 3) Data la funzione

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2 - iz},$$

classificare le sue singolarità e determinarne i residui.

- 4) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^4 + 1}.$$