

**ANALISI FUNZIONALE APPLICATA ALLA SCIENZA  
DEI MATERIALI - TEMA D'ESAME DEL 28 APRILE  
2008**

PROF. SUSANNA TERRACINI

- 1) (a) Calcolare la serie di Fourier associata alla funzione  $2\pi$ -periodica definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0, \pi) \\ 0 & \text{se } x \in [\pi, 2\pi). \end{cases}$$

(b) Studiare la convergenza puntuale di tale serie di Fourier, con particolare riguardo al punto  $x = \pi$ , motivando le affermazioni dal punto di vista teorico.

(c) Trovare, sotto forma di serie di Fourier, la soluzione  $2\pi$ -periodica dell'equazione

$$y''(x) - 3y(x) = f(x).$$

- 2) Dire per quali  $z \in \mathbf{C}$  le funzioni

(a)  $f(z) = iz^2 + \sin(z)$ ;

(b)  $f(x + iy) = xy + i(x^2 - y^2)$ ;

(c)  $f(z) = (1 + i)|z|^2$

sono derivabili in senso complesso.

- 3) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{\cos x}{x^2 + 4}.$$

- 4) Determinare lo spettro dell'operatore di Schrödinger con campo magnetico costante,  $L = (i\nabla + \mathbf{A})^2$  in dimensione 2. Si intende che il campo sia ortogonale al piano  $xy$ :  $\mathbf{B} = b\mathbf{k}$  e  $\mathbf{A} = bx\mathbf{j}$ , in modo che  $\mathbf{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B}$ .