Numbers written on restaurant bills within the confines of restaurants do not follow the same mathematical laws as numbers written on any other pieces of paper in any other parts of the Universe.

Life, the Universe and Everything
DOUGLAS ADAMS (1952 - 2001)

CAPITOLO 2

Numeri

Numeri (naturali, razionali, irrazionali algebrici, reali, proprietà dei numeri reali, continuità, ordinamento, rappresentazione decimale, sezioni di Dedekind/completezza/successioni monotone convergono/intersezione infinita di monotona..., numerabilità, operazioni con i reali,inf,sup).

§ 1 I numeri interi

Si definisce l'insieme dei numeri interi *naturali* con il simbolo

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Per ogni coppia di numeri naturali è possibile calcolarne la somma

$$x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N} \implies x + y = y + x \in \mathbb{N}.$$

Il prodotto di due numeri naturali n e m si può calcolare iterando la somma di n con se stesso m volte (o, equivalentemente, la somma di m con se stesso n volte):

$$n \cdot m = m \cdot n = \underbrace{n + \dots + n}_{m \text{ volte}} = \underbrace{m + \dots + m}_{n \text{ volte}}.$$

Si pone poi $n \cdot 0 = 0 \cdot n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Segue la *proprietà distributiva*: per ogni possibile scelta di a, n e n numeri naturali, si ha

$$(a + b)n = n(a + b) = an + bn.$$

Ricordiamo la seguente importante proprietà dello zero: per ogni $n \in \mathbb{N}$ la somma di n con 0 è uguale a n:

$$n + 0 = n.$$

Analogamente, per ogni numero naturale n si ha

$$n \cdot 1 = 1 \cdot n = n.$$

Si dice che 0 è l'*elemento neutro* rispetto alla somma, dato che è quel numero che sommato agli altri numeri non li cambia.

Abbiamo quindi l'insieme $\mathbb{N}$ e due operazioni (la somma e il prodotto) su di esso. Le due operazioni si dicono *commutative*, perché $a + b = b + a$ e $ab = ba$. Così come il prodotto si definisce iterando la somma, così si definisce l'*elevamento a potenza* iterando il prodotto: per $n > 0$, si pone

$$b^n = \underbrace{b \cdot \cdots \cdot b}_{n \text{ volte}}.$$

Se $n = 0$ e $b > 0$, allora si definisce $b^n = b^0 = 1$, mentre per $n = 0$ e $b = 0$ l'operazione non è definita. Risulta che l'operazione di elevazione a potenza non è commutativa (per esempio, $8 = 2^3 \neq 3^2 = 9$). La proprietà distributiva si legge nei due modi

Vedremo in ****TODO**** il motivo per cui non è possibile definire in modo coerente il valore di 0^0.

$$\begin{aligned} b^{n+m} &= b^n \cdot b^n \\ (ab)^n &= a^n \cdot b^n \\ (b^n)^m &= b^{nm} \end{aligned}$$

Queste sono anche chiamate le *proprietà delle potenze*.

Una importante relazione tra i numeri naturali è la *relazione d'ordine*: per ogni coppia di numeri naturali x e y una sola delle seguenti alternative è vera:

$$\begin{cases} x < y \iff y > x \\ x = y \\ x > y \iff y < x. \end{cases}$$

La relazione d'ordine dei numeri naturali gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} x < y &\iff x + n < y + n \\ \text{Per ogni } c > 0, x < y &\iff cx < cx \\ x < y, y < z &\implies x < z. \end{aligned}$$

Si definiscono i simboli $\leq$ e $\geq$ a partire dalle relazioni $<$, $=$ e $>$ come segue:

$$x \leq y \iff \text{“}x < y \text{ oppure } x = y\text{''} \iff \text{“Non è vero che x ¿ y''}$$
$$x \geq y \iff \text{“}x > y \text{ oppure } x = y\text{''} \iff \text{“Non è vero che } x < y\text{''}.$$

Finiamo questa breve introduzione ai numeri interi con una importante proprietà: *Se $a \leq b$, allora esiste un unico intero $x \in \mathbb{N}$ tale che*

$$a + x = b,$$

e si scrive

$$x = b - a.$$

Questo consente di definire i numeri con segno

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

con la seguente proprietà: per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, il numero $-n$ è tale che

$$n + (-n) = 0.$$

L'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ è quindi una *estensione* dell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ mediante l'aggionta dei numeri negativi $-1, -2, \dots$ in modo tale da fare sì che l'equazione

$$a + x = b$$

abbia sempre una (ed unica) soluzione in $\mathbb{Z}$, per ogni scelta di a e b in $\mathbb{N}$ (e non solo con la restrizione $a \leq b$).

§ 2 La dimostrazione per induzione

La relazione d'ordine sull'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ consente di definire il *minimo* di due numeri:

$$\min(x, y) = \begin{cases} x & \text{se } x < y \\ x = y & \text{se } x = y \\ y & \text{se } y > x \end{cases}$$

È facile calcolare il minimo di un insieme finito di numeri, a partire dalla definizione di minimo di due numeri.

Più in generale, dato un insieme X anche infinito di numeri interi $X \subset \mathbb{N}$, il minimo di X, se esiste, è quel numero $n_0 \in X$ con la seguente proprietà: per ogni $x \in X$, $n_0 \leq x$. Vale la seguente proposizione.

➡ È facile verificare che il minimo, se esiste, è unico: infatti, se ci fossero due minimi n_1 e n_2 dell'insieme X, allora dovrebbe essere che $n_1 \leq n_2$ (dato che n_1 è minimo e n_2 è un elemento di X) e contemporaneamente $n_2 \leq n_1$ (dato che n_2 è minimo e n_1 è un elemento di X), e quindi $n_1 = n_2$.

La notazione posizionale

Il modo con cui si scrivono i numeri si chiama anche *notazione* numerica, oppure *sistema* si numerazione. Il sistema più diffuso è la *notazione posizionale*: ad ogni elemento di un insieme di simboli (dette *cifre*) si associa un valore numerico, che verrà moltiplicato per un fattore che dipende dalla *posizione* con cui la cifra compare nella scrittura del numero. Per esempio, il numero 2005 indica che ci sono 5 unità, 0 decine, 0 centinaia e 2 migliaia:

$$2005 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0.$$

Il numero di cifre impiegate (incluso lo 0) è detto la *base* del sistema di numerazione. Lo stesso numero, scritto in base 2 (cioè con le sole cifre 0 e 1) è

$$11111010101 = 1 \cdot 2^10 + 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + \\ +1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

Scritto in notazione romana (non posizionale):

$$\mathrm{MMV} = \mathrm{M} + \mathrm{M} + \mathrm{V} = 1000 + 1000 + 5.$$

È anche possibile utilizzare le cifre romane in un sistema posizionale a base 10, ma occorre separare (per esempio con un punto) le cifre: II.II..V. L'idea di indicare l'ordine di grandezza delle cifre con la posizione è stata per secoli utilizzata con gli *abaci*, naturalmente anche quando i sistemi di numerazione non erano posizionali. Il sistema posizionale (decimale o no) restò per molto tempo solo uno dei vari sistemi utilizzati parallelamente.
Le cifre (dette arabe-indiane) che utilizziamo furono introdotte in India all'inizio del V secolo d.C., ed il sistema di numerazione fu diffuso ed utilizzato già nel VII secolo (sempre in India); venne venne poi acquisito e diffuso da matematici persiani nel 825 d.C. (Al-Khwarizmi) e arabi nel 830 d.C. (Al-Kindi). In Europa fu introdotto attorno al decimo secolo; nel 1202 Leonardo Pisano (Fibonacci) pubblicò il *Liber abaci*, che contribuì significativamente alla sua divulgazione. Il sistema però non si diffuse ampiamente se non con l'invenzione della stampa. Uno dei vantaggi della notazione posizionale è il fatto di poter rappresentare i numeri su di una retta, oltre che di poter più facilmente trattare le operazioni tra numeri. Uno svantaggio è che è un sistema facilmente soggetto ad errori e frodi: basta aggiungere una cifra, o sbagliarne la lettura, per alterare il valore del numero senza possibilità di correzione (il motivo per cui sugli assegni l'importo va scritto a parole e non solamente in cifre).
Naturalmente anche le frazioni si possono rappresentare con la notazione posizionale, aggiungendo le posizioni per le cifre che rappresentano i decimi, i centesimi, i millesimi. . . Basta utilizzare un opportuno simbolo per *separare* la parte intera da quella decimale (in alcuni paesi, come l'Europa continentale per esempio, si usa la virgola; in altri, come gli USA, il punto; nel passato si sono usati punti, barre verticali, barre sopra le unità e altri simboli).
Sistemi di notazione posizionale non completamente decimali vengono tuttora utilizzati, come per esempio la misurazione degli angoli e delle coordinate geografiche (gradi, minuti primi e minuti secondi $10°10'12''$) e analogamente del tempo (ore, minuti e secondi), di indirizzi IP (149.132.104.42); le cifre romane vengono utilizzate per gli orologi e talvolta le date; nel mondo anglosassone la suddivisione delle unità di misura non è decimale (anche se molti stati hanno stato adottato il Sistema Internazionale): un piede (*foot*) è suddiviso in 12 pollici (*inch*); una iarda (*yard*) è suddivisa in 3 piedi; un miglio consiste di 1760 iarde, 16 once (*ounce*) formano una libbra (*pound*). . .

(2.1) Proposizione. *Sia X un insieme (anche infinito) di numeri interi $X \subset \mathbb{N}$. Allora esiste il minimo di X.*

Conseguenza della proposizione (2.1) è la tecnica di *dimostrazione per induzione*. Supponiamo di avere una successione di proposizioni

$$P(1), P(2), P(3), \dots, P(n-1), P(n), \dots$$

che dipendono dall'intero n. Vale il seguente teorema.

Facciamo partire l'indice n da 1 per semplicità: in realtà si può ripetere il ragionamento a partire da un intero qualsiasi.

(2.2) Teorema (Induzione). *Se le due seguenti condizioni sono soddisfatte*

$$\begin{cases} P(1) \text{ è vera} \\ \text{Per ogni } n \geq 1, \text{ se } P(n-1) \text{ è vera allora } P(n) \text{ è vera} \end{cases}$$

allora $P(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$.

➡ Osserviamo che la seconda delle condizioni è una *implicazione* materiale, ed è l'implicazione che deve essere vera, non la sua antecedente o conseguente. Non dobbiamo assumere che $P(n-1)$ è vera o che $P(n)$ lo sia: solo che se per caso $P(n-1)$ è vera allora anche $P(n)$ è vera.

Dimostrazione. La dimostrazione è per assurdo. Supponiamo la tesi falsa, cioè supponiamo che non è vero che $P(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$. Sia $X \subset \mathbb{N}$ l'insieme di tutti gli indici n tali che $P(n)$ non è vera. Per ipotesi d'assurdo X non è vuoto, dal momento che contiene qualche elemento. Segue dalla proposizione (2.1) che X ha un elemento minimo, che chiamiamo n_0. Esso è il più piccolo intero n per cui $P(n)$ è falsa. Ora, la prima delle ipotesi dice che $P(1)$ è vera, e quindi $n_0 > 1$. Ne segue che $n_0 - 1 \leq 1$, e quindi $P(n_0-1)$ è una proposizione ben definita nella successione che stiamo considerando. Dato che $n_0 - 1 < n_0$ e n_0 è il minimo di X, $n_0 - 1$ non può essere un elemento di X, cioè $P(n_0 - 1)$ è vera. Ma per la seconda delle condizioni si sa che $P(n-1)$ implica $P(n)$, e quindi $P(n)$ deve essere non solo falsa, ma anche vera: una contraddizione. L'ipotesi d'assurdo è quindi falsa e la tesi è vera. □

(2.3) Esempio. Dimostriamo per induzione la seguente proposizione: per ogni intero n, la somma dei primi n numeri dispari è uguale a n^2. La proposizione $P(n)$ è dunque "la somma dei primi n numeri dispari è uguale a n^2". Verifichiamola intanto per i primi passi ($P(1)$, $P(2)$,...).

$$\begin{aligned}
n = 1 &: \ 1 = 1^2 \\
n = 2 &: \ 1 + 3 = 2^2 \\
n = 3 &: \ 1 + 3 + 5 = 3^2 \\
n = 4 &: \ 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2 \\
&\ \dots
\end{aligned}$$

Si ha quindi in particolare che $P(1)$ è vera.

Dimostriamo che da $P(n-1)$ segue $P(n)$. Per prima cosa osserviamo che la somma dei primi n numeri dispari si può scrivere come

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1),$$

dato che il k-esimo intero ha la forma $2k - 1$. Supponiamo quindi vero $P(n-1)$, cioè

$$\sum_{k=1}^{n-1} (2k - 1) = (n - 1)^2.$$

Ma la somma dei primi n interi è uguale alla somma dei primi $(n-1)$ più l'n-esimo intero dispari. Cioè

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k-1) &= \left(\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)\right)+(2n-1)\\ &= (n-1)^2+(2n-1)\\ &= n^2-2n+1+2n-1\\ &= n^2,\end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

§ 3 I numeri razionali

Consideriamo l'insieme di tutte le frazioni

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\},$$

chiamato l'insieme dei *numeri razionali*. L'analogo dell'opposto (il numero $-a$ tale che $a + (-a) = 0$) è il *reciproco* (o *inverso*) di un numero $a \neq 0$: quel numero, indicato con $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$, tale che

$$a \cdot a^{-1} = a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

Rappresentiamo i numeri su una retta orientata (detta *retta reale*). Scelto lo 0 come origine e un verso di percorrenza, gli interi di $\mathbb{Z}$ indicano la scala.

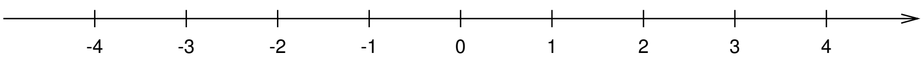

Figura 2.1: La retta reale {figs/rettareale}

L'intervallo $[0, 1]$ (così come tutti gli intervalli $[n, n+1]$, con n intero) contiene a sua volta i punti corrispondenti ai multipli dei decimi, che possono essere suddivisi in centesimi, millesimi, e così via.

Figura 2.2: Decimi {figs/rettareale2}

Tutti i punti che corrispondono a numeri con un numero finito di cifre decimali possono essere rappresentati in questo modo; non solo: ogni punto della retta può essere *approssimato* con la precisione che si desidera da un numero con un numero sufficientemente grande, ma finito, di cifre decimali. Ma è chiaro che

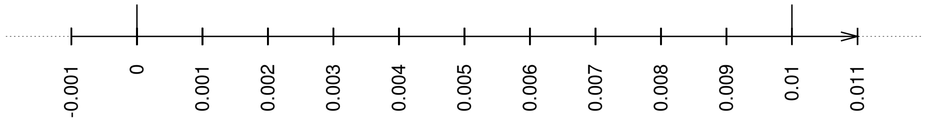

Figura 2.3: Millesimi {figs/rettareale3}

non tutti i punti della retta hanno rappresentazione decimale finita. Basti pensare per esempio ai punti corrispondenti ai seguenti numeri:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3} &= 0,3333333333333333\dots \\
\frac{2}{3} &= 0,6666666666666666\dots \\
\frac{1}{99} &= 0,010101010101010\dots \\
\frac{1}{7} &= 0,1428571428571428\dots \\
\sqrt{2} &= 1,4142135623730950\dots \\
\sqrt[3]{4} &= 1,5874010519681994\dots \\
\pi &= 3.1415926535897932\dots
\end{aligned}
$$

Questi hanno illimitate cifre decimali; alcuni in modo periodico (i primi quattro), altri in modo non periodico (gli ultimi tre). La distinzione non è casuale: i numeri razionali hanno tutti un numero finito di cifre decimali, oppure hanno sviluppo decimale periodico. Tutti gli altri no; hanno sviluppo illimitato e non periodico, e si dicono *irrazionali*.

Verificare che un numero è razionale se e solo se ha sviluppo decimale finito o periodico. **TODO**

§ 4 Successioni di numeri, convergenza e approssimazione

Come abbiamo visto, una successione di numeri è una lista (infinita) che si indica con il simbolo a_n, per n intero che parte da un certo n_0. I numeri con rappresentazione decimale illimitata possono essere descritti dalla *successione* di numeri ottenuti troncando le cifre decimali alla n-esima dopo la virgola. Per esempio,

Si veda a pagina 12, nel paragrafo § 6.

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 0,3 \\
a_2 &= 0,33 \\
a_3 &= 0,333 \\
a_4 &= 0,3333 \\
&\dots \\
a_n &= 0,333\dots 3
\end{aligned}
$$

Di fatto le successioni di numeri (in genere, di numeri razionali) vengono definite per calcolare *approssimazioni* di altri numeri. Per esempio, la successione a_n definita poco sopra permette di ottenere *approssimazioni* decimali accurate quanto basta del numero (razionale) $\frac{1}{3}$.

In generale, si dice che un numero x è *approssimato* da un numero y (e viceversa che y è una *approssimazione*, cioè un *valore approssimato*, di x) fino a 10^{-n} se x e y hanno le prime n cifre decimali uguali. Per esempio $0,3$ è una approssimazione fino al decimo (a 10^{-1}) di $1/3$. Il valore assoluto $|x-y|$ è spesso chiamato *errore* (anche, *errore assoluto*, mentre il valore $|x-y|/x$ è detto *errore relativo*. Si dice anche che y è una approssimazione di x con errore $|x-y|$.

(2.4) Definizione. Si dice che una successione a_n *converge* ad un certo numero x se per quanto piccolo si scelga $\epsilon > 0$, è possibile trovare un certo intero N per cui tutti i termini a_n della successione da N in poi (cioè con n maggiore di N) approssimano x con un errore minore di ϵ.

Più formalmente ma in modo equivalente, la successione a_n *converge* a x se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un certo N tale che per ogni $n \geq N$ vale la diseguaglianza

$$|a_n - x| < \epsilon.$$

(2.5) Esempio. La successione $a_1 = 1$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = 1/3$, ..., $a_n = 1/n$ converge a 0. Infatti, preso $\epsilon > 0$, basta osservare che $1/n < \epsilon$ se e solo se $n > 1/\epsilon$. Se quindi si prende il *più piccolo intero* $N = N(\epsilon)$ *tra tutti gli interi maggiori di* $1/\epsilon$ *– dipende ovviamente dalla scelta di* ϵ, per ogni $n \geq N$ si ha $n \geq N > 1/\epsilon$, e dunque $1/n < \epsilon$. L'errore $|a_n - 0| = 1/n$ è quindi sempre miniore di ϵ, per tutti gli n più grandi di N.

(2.6) Esempio. La successione definita da $a_1 = 0,5$, $a_2 = 0,55$, $a_3 = 0,555$, $a_4 = 0,5555$ ... converge? In questo caso sia $x = 0,5555555\ldots$ (rappresentazione decimale periodica di periodo 5). Allora gli errori sono

$$\begin{aligned}
|a_1 - x| &= 0,05555555555\cdots < 0,1\\
|a_2 - x| &= 0,00555555555\cdots < 0,01\\
|a_3 - x| &= 0,00055555555\cdots < 0,001\\
|a_4 - x| &= 0,00005555555\cdots < 0,0001\\
|a_5 - x| &= 0,00000555555\cdots < 0,00001
\end{aligned}$$

➡ In realtà ci sono due modi di troncare una rappresentazione decimale illimitata. Il più ovvio, quello che utilizziamo in questo paragrafo, è il semplice *troncamento* dopo un certo numero di cifre. Quello che invece minimizza l'errore probabile è l'*arrotondamento*: prima di troncare alla n-esima cifra, si aumenta di 5 la $(n+1)$-esima. In questo modo capita che si può arrotondare per eccesso oppure per difetto. In generale l'errore introdotto *troncando* un numero è doppio dell'errore introdotto *arrotondandolo*.

Il temine a_n approssima x con errore minore di 10^{-n}: per ogni $\epsilon > 0$, si prenda N tale che $10^{-N} < \epsilon$. Dato che se $n > N$ allora $10^{-n} < 10^{-N}$, siccede che per tutti gli n maggiori di N si ha $|a_n - x| < 10^{-n} < 10^{-N} < \epsilon$, cioè la successione a_n converge a x.

(2.7) Esempio (Radice quadrata di 2**).** La successione che definiamo è una successione *ricorsiva*. Sia $x_1 = 2$. Supponiamo di avere calcolato x_n e che sia diverso da zero: il termine successivo è

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2/x_n}{2} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$

cioè la media tra x_n e $2/x_n$. Questo ci consente di calcolare facilmente i primi termini della successione:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= \frac{3}{2} = 1,5 \\ x_3 &= \frac{17}{12} = 1,416\dots \\ x_4 &= \frac{577}{408} = 1,4142\dots \\ \dots \end{aligned}$$

Le domande che sorgono spontanee sono: È possibile il termine x_n per n grande quanto si vuole oppure ad un certo punto ci si deve fermare (perché $x_{n-1} = 0$)? Ammesso che x_n sia definito per ogni n, la successione converge? Se converge, a che numero? Osserviamo sembra vero che per ogni $n \geq 1$ si ha $1 \leq x_n \leq 2$. Vediamo come dimostrare per induzione questo fatto, e così rispondere alla prima domanda (nessun termine della successione può diventare uguale a zero se sono tutti maggiori di 1!). La proposizione $P(n)$ è quindi "$1 \leq x_n \leq 2$". Per definizione $x_1 = 2$, e dato che $1 \leq 2 \leq 2$ sappiamo che $P(1)$ è vera. Supponiamo che $P(n)$ sia vera, cioè che $1 \leq x_n \leq 2$. Segue che $1/2 \leq x_n/2 \leq 1$ e $1 \geq 1/x_n \geq 1/2$. Vogliamo mostrare che allora anche $P(n+1)$ è vera, cioè x_{n+1} soddisfa le medesime disuguaglianze. Ma abbiamo visto che $x_n/2 \leq 1$ e $1/x_n \leq 1$, mentre $x_n/2 \geq 1/2$ e $1/x_n \geq 1/2$ e che per definizione

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$

Segue che

$$1/2 + 1/2 \leq x_{n+1} \leq 1 + 1,$$

cioè $1 \leq x_{n+1} \leq 2$ e quindi $P(n+1)$. Vedremo negli esercizi come trattare le altre questioni (esercizio (2.4) di pagina 28).

➡ La successione a_n è data dai troncamenti alle prime n cifre di x. Come sarebbe la successione degli *arrotondamenti* di x alle prime n cifre

➡ Abbiamo detto che numeri con cifre decimali periodiche sono razionali, per cui dovrebbe essere possibile scrivere x come rapporto di interi $x = p/q$. Proviamo a determinare tali interi. Osserviamo che $10x = 5,555\dots$, per cui $10x - x = 5,555\cdots - 0,555\cdots = 5$. Ma allora segue subito che $9x = 5$, cioè $x = 5/9$.

➡ Il procedimento ricorsivo ricorda il procedimento di dimostrazione per induzione.

➡ Questa successione è una applicazione del *metodo babilonese* per calcolare la radice quadrata di un numero. Probabilmente era già noto ai matematici babilonesi nel 2000 a.C.

➡ Si dividono per 2 le disequazioni, oppure si prendono i reciproci, ricordando di invertire il verso delle disuguaglianze.

§ 5 Il *continuum* dei numeri reali

Abbiamo visto poco sopra che sulla *retta reale* (indicata con il simbolo $\mathbb{R}$) ci sono punti che corrispondono a numeri con un numero finito di cifre decimali, e altri a numeri che hanno una rappresentazione decimale illimitata ma possono comunque essere *approssimati* con l'accuratezza che si desidera da successioni di numeri razionali (la successione dei troncamenti decimali oppure altre successioni definite in modo opportuno). È una descrizione sintetica e intuitiva delle proprietà della retta reale. Le operazioni di somma e prodotto e il confronto di interi e razionali si possono estendere a tutta la retta reale, in modo che le stesse proprietà valgano: Per ogni possibile scelta dei numeri reali $x, y, z \in \mathbb{R}$:

① *(Proprietà associativa della somma e del prodotto)* $(x+y)+z = x+(y+z), (xy)z = x(yz)$.

② *(Proprietà commutativa della somma e del prodotto)* $x + y = y + x$, $xy = yx$.

③ *(Zero e uno)* $x + 0 = x$, $1 \cdot x = x$.

④ *(Opposto e reciproco)* Esiste un unico elemento (l'*opposto*) $-x$ tale che $x + (-x) = 0$; se $x \neq 0$ esiste un unico elemento (il *reciproco*) $x^{-1} = \frac{1}{x}$ tale che $x \cdot x^{-1} = 1$.

⑤ *(Proprietà distributiva)* $x(y + z) = xy + yz$.

⑥ *(Ordinamento)*

$$x < y \iff x + z < y + z;$$

$$\text{se } c > 0, \text{ allora } x < y \iff cx < cy;$$

$$x < y,\ y < z \implies x < z.$$

Anche l'operazione di elevamento a potenza (che abbiamo visto definito prima solo

sugli interi) può essere estesa a tutta la retta reale: per ogni $b > 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ si può definire il numero b^x con le seguenti proprietà. Per ogni $a, b > 0$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$:

➡ Definiamo l'elevamento a potenza solo per base positiva. Nell'esercizio (2.5) vediamo perché.

① $b^{x+y} = b^x \cdot b^y$;

② $(ab)^x = a^x \cdot b^x$;

③ $(b^x)^y = b^{xy}$;

La *completezza* di $\mathbb{R}$

Il fatto che $\mathbb{R}$ contiene tutti i punti, qualsiasi rappresentazione decimale illimitata essi abbiano è una proprietà di $\mathbb{R}$ che è equivalente ad altre proprietà meno immediate ma più utili nelle dimostrazioni di alcuni fatti importanti.
Vediamo per esempio come è possibile dedurre il fatto importante che *ogni successione crescente e limitata in* $\mathbb{R}$ *converge ad un certo limite.* Sia dunque x_n una successione, per $n \geq$, di numeri reali tali che se $n < m$ allora $x_n < x_m$. Essere limitata significa che esiste L tale che per ogni n si ha $x_n \leq L$. A meno di prendere L più grande possiamo supporre L intero. Analogamente, esiste di sicuro un intero l tale che $l \leq x_1$. Suddividiamo l'intervallo $[l, L]$ in un certo numero di intervalli del tipo $[n, n+1)$ (cioè $[0,1)$,$[1,2)$, $[2,3)$ – separati dai punti a coordinate intere). Dato che la successione è formata da infiniti punti x_n di $[l, L]$, mentre gli intervalli sono finiti, almeno uno degli intervalli deve contenere infiniti punti della successione. Possono essere più di uno? Supponiamo per assurdo di sì: per esempio $[1,2)$ e $[4,5)$. Ma se $[4,5)$ contiene infiniti punti, allora ne contiene almeno uno, supponiamo x_{1000}. Ma allora, dato che x_n è crescente, se $n > 1000$ nessun punto x_n può essere minore di x_{1000}, e quindi di 4; dunque non ce ne possono essere infiniti in $[1,2)$. Dunque gli infiniti punti sono nell'intervallo $[4,5)$. Ora suddividiamo l'intervallo $[4,5)$ in dieci intervalli di un decimo: $[4,4.1)$, $[4.1,4.2)$, $[4.2,4.3)$, $\ldots [4.9,5)$. Lo stesso ragionamento di prima si applica a questi dieci intervalli: soltanto uno può contenere infiniti punti della successione. Troviamo così un secondo intervallo, che supponiamo essere $[4.3,4.4)$. Proseguendo in questo modo, suddividendo l'intervallo $[4.3,4.4)$ nei dieci sottointervalli $[4.3,4.31)$, $[4.31,4.32)$, $\ldots$, $[4.39,4.4)$ infinite volte si ottiene una successione di intervalli di lunghezza sempre più piccola, che contengono ognuno infiniti punti della successione, e contemporaneamente una rappresentazione decimale illimitata $4.3\ldots$. Corrisponde ad un numero $x \in \mathbb{R}$? Certo, a patto che non sia alla fine periodica di periodo 9 (in questo caso si sa cha basta aumentare di uno la cifra precedente alla periodicità 9, come nel caso $0,9999999999\cdots = 1$ – si veda l'esercizio $\boxed{\mathbf{5}}$ a pagina 32). Come vedere che x_n converge a tale x? Sia $\epsilon > 0$ fissato. Allora esiste uno degli intervalli del timo $[4.3912, 4.3913)$ con ampiezza minore di ϵ. Dato che è l'unico intervallo a contenere infiniti punti della successione, per lo stesso ragionamento di sopra per x_{1000} succede che da un certo indice N in poi tutti i termini della successione approssimano x con un errore minore dell'ampiezza di $[4.3912, 4.3913)$. Cioè x è il limite della successione.
Viceversa, non è difficile vedere che se ogni successione crescente e limitata ha limite in $\mathbb{R}$, allora $\mathbb{R}$ contiene tutte le rappresentazioni decimali illimitate: basta prendere la successione di tutti i troncamenti di una rappresentazione decimale illimitata, saltando gli zeri (altrimenti potrebbe non essere crescente). È limitata e crescente, e se tutte le successioni limitate e crescenti hanno limite, allora deve avere limite.
Questa proprietà si chiama *completezza* ed è molto importante. Osserviamo, naturalmente, che ogni successione crescente e limitata ha limite in $\mathbb{R}$ se e solo se ogni successione decrescente e limitata ha limite in $\mathbb{R}$ (basta considerare che se x_n è una successione crescente (risp. decrescente) e limitata, allora la successione opposta $-x_n$ è una successione decrescente (risp. crescente) e limitata.

La retta reale $\mathbb{R}$ viene detta anche *continuum*, perché ha, oltre alla lista di proprietà sopra elencate, una importante proprietà aggiuntiva: *essa contiene tutti i punti, qualsiasi rappresentazione decimale illimitata essi abbiano.* Traduce in termini un po' più formali la nostra intuizione di "linea continua".

➡ L'idea di tale estensione è semplice, anche se dimostrarne le proprietà è abbastanza complicato: se b e x sono approssimati da due successioni di numeri razionali b_n e x_n, allora basta determinare una successione di approssimazioni di b^x (approssimando, per esempio, $b_n^{x_n}$, e dimostrare che il limite non dipende dalla scelta fatta per le successioni b_n e x_n (è chiaro che ogni numero ha molte successioni di approssimazioni).

Naturalmente è possibile definire successioni di numeri reali (non solo di razionali): basta leggere la definizione (2.4) nell'ambito dei numeri reali. Vale la pena di elencare le proprietà dei limiti per successioni di numeri reali, visto che sono alla base del concetto di *continuità* che verrà sviluppato in seguito (nel capitolo 6). Indichiamo con a_n, b_n, x_n successioni qualsiasi e con $\lim_n a_n$ il limite della successione a_n (assumiamo che esista!).

- $\lim_n (a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$.
- $\lim_n (a_n \cdot b_n) = (\lim_n a_n) \cdot (\lim_n b_n)$.
- se $b_n > 0$ per ogni n e $\lim_n b_n > 0$, allora $\lim_n (b_n^{x_n}) = (\lim_n b_n)^{\lim_n x_n}$.

Riassumiamo anche un po' di termini che abbiamo usato per la prima volta. Una successione x_n si dice *crescente* se ogni volta che $n < m$ si ha $x_n < x_m$. Si dice *decrescente* se invece ogni volta che $n < m$ si ha $x_n > x_m$. Spesso si enfatizza questo concette e si dice che la successione è *monotona crescente* oppure che è *monotona descrescente*. Se invece si considera una successione x_n per cui ogni volta che $n < m$ si ha $x_n \leq x_m$ (rispettivamente, $x_n \geq x_m$), allora si dice che è *crescente in senso lato* (rispettivamente, *decrescente in senso lato*). Una successione per cui tutti gli x_n sono uguali tra di loro si dice *successione costante*. Per esempio, $x_n = 4$ per ogni $n \geq 1$.

Nella Babele della terminologia matematica, si usano i seguenti sinonimi di successione monotona crescente: crescente, strettamente crescente. I seguenti per successione crescente in senso lato: non decrescemte, crescente. Lo stesso per decrescente, strettamente decrescente, non crescente, . . .

Sottosuccessioni

TODO

Esercizi

☆ **(2.1)** Determinare il massimo del prodotto di n numeri reali positivi con somma costante.

Soluzione. Con qualche esperimento numerico si può immaginare che il massimo del prodotto si ottiene quando tutti i numeri sono uguali. Sia C la somma (costante) degli n numeri. Vogliamo ora dimostrare quindi che *il massimo del prodotto di n numeri reali positivi con somma C si ottiene (solo) quando tutti i numeri sono uguali a C/n.* Cominciamo a dimostrarlo per due soli numeri. Per $n = 2$, dobbiamo calcolare il massimo del prodotto xy con il vincolo $x + y = C$ e mostrare che si ottiene quando $x = y = C/2$. Osserviamo che

$$\begin{aligned}(x+y)^2 - (x-y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 - x^2 - y^2 + 2xy \\ &= 4xy,\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}xy\frac{1}{4}\left((x+y)^2 - (x-y)^2\right) \\ = \frac{1}{4}(C^2 - (x-y)^2).\end{aligned}$$

Quando $(x-y)^2$ diminuisce, xy aumenta; viceversa, quando $(x-y)^2$ aumenta, xy diminuisce. Segue che il massimo del prodotto xy si ottiene quando $x - y = 0$, cioè $x = y$.

Consideriamo ora n numeri reali positivi $x_1, x_2, \ldots x_n$ con somma C. Sia $P = x_1 x_2 \ldots x_n$ il loro prodotto e supponiamo che esso sia il massimo. Vogliamo dimostrare che $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = C/n$.

Supponiamo quindi, per assurdo, che non tutti i numeri siano uguali. A meno di cambiare gli indici, succede che $x_1 \neq x_2$. Sia $C' = x_1 + x_2$ e $C'' = x_3 + \cdots + x_n$. La costante C si può scrivere come somma

$$C = (x_1 + x_2) + (x_3 + \cdots + x_n) = C' + C''.$$

Dato che il prodotto di due numeri con somma C' è massimo solo quando i due numeri sono uguali (a $C'/2$), ponendo

$$x_1' = x_2' = C'/2$$

si ha

$$x_1'x_2' > x_1x_2 \text{ e } x_1' + x_2' = C'.$$

Ma allora sostituendo x_1' a x_1 e x_2' a x_2 si ottiene una nuova n-upla di numeri x_1', x_2', x_3, ..., x_n con somma $C'+C'' = C$ e con prodotto P' strettamente maggiore del prodotto P:

$$P' = x_1'x_2'x_3 \dots x_n > x_1x_2x_3 \dots x_n = P.$$

Questo contraddice l'ipotesi che P fosse il massimo, e quindi gli n numeri devono essere uguali. □

☆ **(2.2)** Dimostrare la seguente proposizione: La media geometrica di n numeri positivi è sempre minore della loro media aritmetica, tranne quando i numeri sono tutti uguali (e in questo caso le medie coincidono).

Soluzione. Per risolvere questo esercizio utilizziamo il risultato dell'esercizio (2.1). La media geometrica di n numeri x_1, x_2, ..., x_n è la radice n-esima del loro prodotto

$$\text{Media geometrica} = G = \sqrt[n]{x_1x_2 \dots x_n}.$$

La media aritmetica è

$$\text{Media aritmetica} = M = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Tutti i numeri con media aritmetica uguale a M (fissato) hanno somma uguale a nM. Se sono tutti uguali, allora sono tutti uguali a M: ne segue che il prodotto di n numeri con media M non può essere maggiore di M^n (il massimo che si ottiene quando tutti i numeri sono uguali), ed è uguale a M^n appunto solo quando sono uguali tra loro. Cioè per ogni n-upla di numeri si ha

$$x_1x_2 \dots x_n \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \right)^n,$$

e vale l'uguaglianza quando i numeri sono tutti uguali. Estraendo la radice n-esima si ottiene la disuguaglianza cercata:

$$\text{Media geometrica} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \text{Media aritmetica.}$$

➡ Si può perché... **TODO**

□

☆ **(2.3)** Dimostrare che per ogni numero razionale $x = \frac{p}{q}$ dell'intervallo $(0, 1)$ e per ogni numero reale $b > 0$ diverso da 1 vale la disuguaglianza

$$b^x < 1 + (b - 1)x.$$

(Suggerimento: utilizzare il confronto tra media geometrica e media aritmetica per $n + m$ numeri, di cui n sono uguali a b e m uguali a 1.)

Soluzione. Seguendo il suggerimento, consideriamo $n+m$ numeri, di cui i primi n sono uguali a b e gli altri sono uguali a 1. La media geometrica è quindi

$$\sqrt[(n+m)]{b \cdot b \cdot \cdots \cdot b \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1} = b^{\frac{n}{n+m}}$$

mentre la media aritmetica è

$$\frac{b + b + \cdots + b + 1 + 1 + \cdots + 1}{n + m} = \frac{nb + m}{n + m}.$$

Dal momento che gli $n + m$ numeri non sono tutti uguali (per ipotesi $b \neq 1$), si ha che la media geometrica è strettamente minore della media aritmetica (vedi esercizio (2.2))

➡ Se $b = 1$, allora i due termini della disuguaglianza sono uguali: per ogni x si ha che $1^x = 1$, e $1 + x(1 - 1) = 1$.

$$b^{\frac{n}{n+m}} < \frac{nb + m}{n + m}.$$

Ora, dal momento che $x > 0$ e $x < 1$ si ha che $q > p > 0$, per cui è possibile sostituire $n = p$ e $m = q - p$ per ottenere la diseguaglianza

$$b^{\frac{p}{q}} < \frac{pb + q - p}{q} = \frac{p}{q}b + 1 - \frac{p}{q},$$

che si può scrivere anche come

$$b^x < 1 + x(b - 1).$$

□

♫ **(2.4)** Consideriamo la successione x_n dell'esempio (2.7) di pagina 23:

$$x_1 = 2$$
$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$

Dimostrare che è monotona decrescente e che converge a $\sqrt{2}$.

Soluzione. Con un po' di calcoli si vede che i termini $x_1 = 2$, $x_2 = 1,5$, $x_3 = 1,416\dots$, $x_4 = 1,4142\dots$ sembrano decrescenti. Dimostriamo per induzione che in effetti la successione è monotona decrescente, ovvero che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$x_{n+1} < x_n.$$

Prima di iniziare, osserviamo che per definizione $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$, e quindi $x_{n+1} < x_n$ se e soltanto se

$$\begin{aligned}\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} < x_n &\iff \frac{1}{x_n} < \frac{x_n}{2} \\ &\iff x_n^2 > 2.\end{aligned}$$

Quindi la successione è monotona decrescente se e solo se per ogni $n \geq 1$ si ha $x_n^2 > 2$.

Procediamo per induzione: se $n = 1$, allora $x_1 = 2$ e $x_1^2 = 4 > 2$, e il primo passo dell'induzione è verificato. Supponiamo $x_n^2 > 2$. Allora

$$\begin{aligned}x_{n+1}^2 = (\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n})^2 &= \frac{x_n^2}{4} + \frac{1}{x_n^2} + 1 \\ &> 1 + \frac{1}{x_n^2} + 1 \\ &> 2.\end{aligned}$$

Possiamo concludere che la successione è monotona decrescente.

Supponiamo che x_n converga a un certo x (che deve appartenere all'intervallo $[1, 2]$, dato che lo stesso vale per tutti i termini della successione). È chiaro che anche la successione $y_n = x_{n+1}$ converge a x: dunque il limite x deve soddisfare l'uguaglianza

$$x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x},$$

che è equivalente a

$$x^2 = 2.$$

Di soluzioni in $[1, 2]$ c'è solo $\sqrt{2}$, e quindi l'unico limite possibile è $\sqrt{2}$.

> ➡ Stiamo tacitamente usando il fatto che il limite di una somma e il limite del reciproco sono rispettivamente la somma dei limiti e il reciproco del limite, quando tali limiti esistono.

Dobbiamo ora mostrare che in effetti converge; per farlo, mostriamo innanzitutte che la successione ausiliaria definita da $a_n = x_n^2 - 2$ converge a zero. Infatti, dall'uguaglianza

$$x_{n+1}^2 - 2 = \frac{x_n^2}{4} + \frac{1}{x_n^2} - 1$$

segue

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{2+a_n}{4} + \frac{1}{2+a_n} - 1 \\ &= \frac{(2+a_n)^2 + 4 - 8 - 4a_n}{4(2+a_n)} \\ &= \frac{4 + a_n^2 + 4a_n + 4 - 8 - 4a_n}{4(2+a_n)} \\ &= \frac{a_n^2}{4(2+a_n)}. \end{aligned}$$

Sappiamo che $x_n^2 > 2$ per tutti gli n, per cui $x^2 - 2 = a_n > 0$ per ogni n e quindi

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{4(2+a_n)} < \frac{a_n^2}{8}.$$

I primi valori di a_n sono $a_1 = x_1^2 - 2 = 2$ e $a_2 = x_2^2 - 2 = 9/4 - 2 = 1/4$. Ma allora possiamo stimare facilmente i successivi:

$$\begin{aligned} a_3 &< \frac{a_2^2}{8} = \frac{(2^{-2})^2}{2^3} = 2^{-7} \\ a_4 &< \frac{a_3^2}{8} < \frac{(2^{-7})^2}{2^3} = 2^{-17} \\ a_5 &< \frac{a_4^2}{8} < \frac{(2^{-17})^2}{2^3} = 2^{-37} \\ a_6 &< \frac{a_5^2}{8} < \frac{(2^{-37})^2}{2^3} = 2^{-77} \end{aligned}$$

Ancora, per induzione, è possibile quindi mostrare che a_n tende a zero (mostrando, per esempio, che è sicuramente minore di 2^{-n} – questa dimostrazione è lasciata per esercizio).

Non rimane che mostrare che x_n converge a $\sqrt{2}$, ma questo segue facilmente dalla identità $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. Infatti, per ogni n si ha $x_n > \sqrt{2}$ e quindi

$$\begin{aligned} |x_n - \sqrt{2}| &= x_n - \sqrt{2} \\ &= \frac{x_n^2 - 2}{x_n + \sqrt{2}} \\ &= \frac{a_n}{x_n + \sqrt{2}} \\ &\leq \frac{a_n}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} < \frac{a_n}{2} \end{aligned}$$

Quindi x_n approssima $\sqrt{2}$ con un errore più piccolo della metà di a_n, il quale peraltro converge assai rapidamente a zero. □

I logaritmi e la base dei logaritmi naturali

Abbiamo visto che è possibile definire l'elevamento a potenza anche con numeri reali qualsiasi: se $b > 0$ (detto *base*) e $x \in \mathbb{R}$ (detto *esponente*) è definito il numero reale b^x. Così come la sottrazione è l'operazione inversa della somma (si risolve in x l'equazione $a + x = b$), la divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione (si risolve in x l'equazione $ax = b$), qual è l'operazione inversa dell'elevamento a potenza? Dal momento che l'operazione di elevamento a potenza non è commutativa ($2^3 \neq 3^2$, per esempio), ci sono due operazioni inverse possibile: si risolve nella base x l'equazione $x^e = c$ oppure si risolve nell'esponente x l'equazione $b^x = c$. Nel primo caso basta elevare alla potenza e^{-1} entrambi i membri dell'equazione, ed ottenere $x = c^{\frac{1}{e}}$. Nel secondo caso? Non si può fare in altro modo che introdurre il *logaritmo in base* b: si dice che x è il logaritmo in base b di c, dove $b \neq 1$, e si indica

$$b^x = c \iff x = \log_b c.$$

Dato che $b > 0$ e $b \neq 1$, risulta anche $c > 0$ e quindi esiste solo il logaritmo dei numeri positivi. Vediamo come dalle proprietà dell'elevamento a potenza discendono le proprietà dei logaritmi. Da $b^0 = 1$ segue che in ogni base

$$\log_b 1 = 0.$$

Da $b^{x+y} = b^x b^y$ segue che

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y.$$

Ora, le basi più utilizzate per i logaritmi sono 10, 2 (dato che queste sono le basi più utilizzate per la notazione posizionale) e un certo numero reale, molto importante, chiamato e (detto anche *costante di Euler*, o *numero di Euler*) che viene considerato la *base naturale* per i logaritmi. Il logaritmo in base e di un numero c viene anche detto *logaritmo naturale* di c e indicato con il simbolo $\ln c$ (a volte anche $\log c$ – quando non si indica la base del logaritmo si intende che è sottintesa dal contesto: 10 oppure e solitamente). La base naturale e è uguale al limite della successione di numeri razionali

$$e = \lim_n (1 + \frac{1}{n})^n.$$

Nei prossimi esercizi $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ e $\boxed{4}$ (di pagina 32) dimostreremo che effettivamente la successione converge ad un numero reale (dato che è crescente e limitata, e che abbiamo visto nel riquadro di pagina 25 che tutte le successioni crescenti e limitate convergono in $\mathbb{R}$).

(2.5) Cosa c'è di sbagliato nella seguente catena di uguaglianze?

$$\begin{aligned} -1 &= -1 \\ &= (-1)^1 \\ &= (-1)^{\frac{2}{2}} \\ &= \left((-1)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (1)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Soluzione. L'elevamento a potenza con esponente non intero è stato definito solo per base positiva. È infatti solo quando la base è positiva che vale la proprietà

$$(b^x)^y = b^{xy}$$

con x e y non necessariamente interi. Infatti, se $b = -1$, $x = 2$ e $y = \dfrac{1}{2}$ si ha

$$1 = \left((-1)^2\right)^{\frac{1}{2}} \neq (-1)^{2\cdot\frac{1}{2}} = -1.$$

L'errore è quindi tra la terza e quarta riga: non si può utilizzare la proprietà dell'elevamento a potenza (che vale per base positiva) se la base non lo è. □

Esercizi da fare:

(Soluzioni a pagina 81)

☆ **1** Dimostrare, usando l'esercizio (2.3), che per ogni numero razionale $y > 1$ e per ogni numero reale $b > 0$ e $b \neq 1$ vale l'uguaglianza

$$b^y > 1 + (b-1)y.$$

☆ **2** Utilizzando il confronto tra media geometrica e media aritmetica (oppure la disuguaglianza dell'esercizio (2.3)), dimostrare che per ogni coppia di interi m e n tale che $m > n > 0$ si ha

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m.$$

☆ **3** Analogamente all'esercizio precedente, dimostrare che per ogni coppia di interi m e n tale che $m > n > 0$ si ha

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}.$$

(Suggerimento: $(1+1/n)^{-1} = 1 - 1/(n+1)$*)*

☆ **4** Dimostrare che la successione $(1+1/n)^n$ è (monotona) crescente, la successione $(1+1/n)^{n+1}$ è (monotona) decrescente e che per ogni $n > 0$ si ha $(1+1/n)^n < (1+1/n)^{n+1}$. Dedurre che la successione $(1+1/n)^n$ è crescente e limitata.

5 Mostrare che $1 = 0,999999\ldots$.

6 Si consideri la successione definita per ricorsione come $x_1 = 3$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 3/x_n)$. Mostrare che è monotona decrescente e che converge a $\sqrt{3}$.