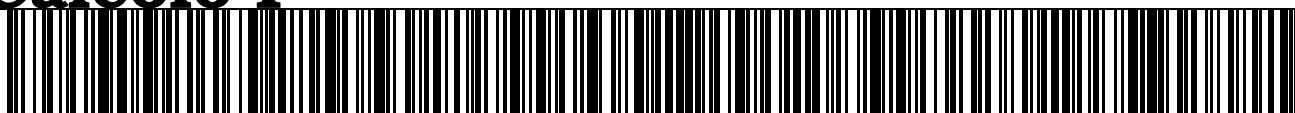


# Calcolo I



© 2005

Printed in Milano.

Draft Copy (Personal Use Only): 9-IX-2005

*Vivina Barutello  
Monica Conti  
Davide L. Ferrario  
Susanna Terracini  
Gianmaria Verzini*

*“La loro è una dura e spietata  
lotta per l’esistenza su un  
pianeta morente”*

---

Edgar Rice Burroughs

---

# Indice

---

<b>Indice</b>	<b>i</b>
<b>1 Preliminari: il linguaggio della matematica</b>	<b>1</b>
§1 Vero e falso . . . . .	1
§2 L'implicazione . . . . .	3
§3 Schemi di ragionamento, sillogismi e deduzione per assurdo . . . . .	5
§4 Quantificatori . . . . .	7
§5 Insiemi . . . . .	9
§6 Simboli, relazioni e funzioni . . . . .	10
<b>2 Numeri</b>	<b>15</b>
§1 I numeri interi . . . . .	15
§2 La dimostrazione per induzione . . . . .	17
§3 I numeri razionali . . . . .	20
§4 Successioni di numeri, convergenza e approssima- zione . . . . .	21
§5 Il <i>continuum</i> dei numeri reali . . . . .	24
<b>3 Numeri complessi</b>	<b>33</b>
<b>4 Funzioni reali di variabile reale</b>	<b>34</b>
§1 Generalità . . . . .	34
§2 Funzioni elementari . . . . .	36
§3 Funzioni composte . . . . .	37
§4 Proprietà di base delle funzioni . . . . .	37
§5 Funzioni inverse . . . . .	37
<b>5 Limiti</b>	<b>38</b>
§1 Limiti notevoli . . . . .	38
<b>6 Il concetto di continuità</b>	<b>40</b>

---

<b>7</b>	<b>La derivata</b>	<b>41</b>
§1	I problemi della velocità, della tangente e del tasso di crescita . . . . .	41
§2	La derivata . . . . .	43
§3	Punti di non derivabilità e loro classificazione . . . .	46
§4	La funzione derivata . . . . .	48
§5	Derivate di ordine superiore . . . . .	50
<b>8</b>	<b>Regole di derivazione</b>	<b>60</b>
§1	Derivate di polinomi . . . . .	60
§2	Derivate di prodotti e quozienti . . . . .	63
§3	Derivate e limiti notevoli . . . . .	65
§4	Derivata della funzione composta . . . . .	67
§5	Derivata della funzione inversa . . . . .	68
§6	Ritorno al rapporto incrementale . . . . .	69
	<b>Esempio di capitolo</b>	<b>75</b>
	<b>Soluzioni degli esercizi</b>	<b>81</b>
	<b>Indice analitico</b>	<b>84</b>

Nessuna umana investigazione si può  
dimandare vera scienza, se essa non passa  
per le matematiche dimostrazioni.

*Trattato della Pittura*  
LEONARDO DA VINCI (1452–1519)

## CAPITOLO 1

---

# Preliminari: il linguaggio della matematica

---

*Logica/linguaggio (implicazione, condiz. nec/suff., ipotesi, tesi, negazione, teorema, lemma, dimostrazione, proposizione, definizione). Simboli: insiemi, appartenenza, relazioni, funzioni, operazioni, somme, prodotti.*

Un aspetto significativo che distingue la matematica dalle altre scienze è l'impossibilità (o l'alta improbabilità) di verificare sperimentalmente i suoi asserti. Se anche risulta possibile decidere della plausibilità di una affermazione alla luce di dati sperimentali, l'affermazione stessa non può essere ritenuta *vera* o *falsa* fino al momento in cui non se ne è trovata una *dimostrazione* rigorosa. In quest'ottica la razionalità, che si esplica attraverso un procedimento deduttivo rigoroso, è – o dovrebbe essere – anche il percorso naturale di apprendimento e scoperta dei temi propri della matematica. D'altro canto è facile immaginare quanto un linguaggio rigoroso e denso di rappresentazioni simboliche possa risultare spesso impenetrabile alla lettura (di qui l'aspetto a volte iniziatico dei testi). Ci accontenteremo quindi ora di introdurre solo alcune forme tipiche di ragionamento e deduzione insieme con alcune astrazioni frequenti nell'uso, senza entrare nel merito dei fondamenti logici e dei dettagli.

### § 1 Vero e falso

Per determinare la validità degli enunciati e delle proposizioni prendiamo in considerazione una logica *bivalente*, cioè ammet-

tiamo che una generica affermazione possa risultare solo *vera* o *falsa* (e non sia vera che falsa o nessuno dei due, indecidibile, ...). Supponiamo che, in un modo che magari a noi sfugge, di ogni proposizione si possa decidere la verità o falsità. È chiaro quindi che chiameremo proposizioni (o equivalentemente teoremi, lemmi, corollari) soltanto quelle espressioni che sono non solo corrette sintatticamente e semanticamente rilevanti ma anche che, per qualche ragione, supponiamo abbiano un “valore di verità” (cioè siano vere oppure false). Per esempio, “ $1 + 1 = 2$ ” e “ $2 > 1$ ” sono proposizioni vere (cioè il valore di verità è “Vero”), “ $1 + 1 = 3$ ” e “ $2 < 1$ ” sono proposizioni false (cioè il valore di verità è “Falso”), mentre “ $5 =$ ” non è corretta dal punto di vista della sintassi (l’uguale può esistere solo nel confronto di due numeri, non di uno solo) e “ $\sqrt{2} + 1$ ” è una espressione corretta ma non è una proposizione che accetteremo, dal momento che non è né vera né falsa.

Vediamo ora come costruire nuove proposizioni a partire da proposizioni date. Sia  $p$  una proposizione (vera o falsa). La *negazione* di  $p$  è la proposizione che si ottiene negando  $p$ , cioè quella che si legge come “Non è vero che  $p$ ”. È ragionevole supporre che se  $p$  è falsa allora la negazione di  $p$  è vera, e se  $p$  è vera la negazione di  $p$  è falsa. Per esempio, la negazione di “ $1 < 2$ ” è “Non è vero che  $1 < 2$ ”, oppure “ $1$  non è minore di  $2$ ”. È ragionevole considerare equivalenti le proposizioni che, pure avendo forma diversa, hanno lo stesso significato, per cui possiamo anche dire che “ $1 \geq 2$ ” è la negazione di “ $1 < 2$ ”.

Date due proposizioni  $p$  e  $q$ , la *coniunzione* di  $p$  e  $q$  “ $p$  e  $q$ ” è la proposizione che si può anche leggere in modo più esteso come “È vero che  $p$  e contemporaneamente è vero che  $q$ ”. Se  $p$  e  $q$  sono vere allora “ $p$  e  $q$ ” è vera, mentre se anche una sola delle proposizioni  $p$  e  $q$  è falsa allora “ $p$  e  $q$ ” è falsa. In modo analogo possiamo definire la *disgiunzione* di  $p$  e  $q$ , “ $p$  o  $q$ ”, che significa “Almeno una delle due proposizioni  $p$  e  $q$  è vera”. Sia per chiarire il significato della negazione, della congiunzione e della disgiunzione che per scrivere in modo più sintetico possiamo utilizzare i simboli

$$\text{NOT } p, \quad p \text{ AND } q, \quad p \text{ OR } q.$$

Determiniamo per esempio quali delle seguenti proposizioni sono vere:

- “ $(1 < 2) \text{ OR } (1 < 3)$ ”: è vero.
- “ $(1 < 2) \text{ AND } (1 < 3)$ ”: è vero.
- “ $(1 > 2) \text{ OR } (1 < 3)$ ”: è vero (la seconda delle due è vera).

➔ La disgiunzione che consideriamo ha lo stesso uso del *vel* in latino, ed è da non confondere con la disgiunzione esclusiva, cioè dalla costruzione latina *aut p aut q*, che significa che una sola tra  $p$  e  $q$  è vera).

➔ I corrispondenti simboli nei trattati di logica matematica sono  $\neg$  (negazione),  $\wedge$  (congiunzione) e  $\vee$  (disgiunzione).

- ❑ “ $(1 > 2) \text{ AND } (1 < 3)$ ”: è falso (devono essere entrambe vere per essere vero, ma la prima è falsa).
- ❑  $(1 > 2) \text{ OR } (1 > 3)$ : è falso.
- ❑  $(1 > 2) \text{ AND } (1 > 3)$ : è falso.

Possiamo anche comporre (utilizzando le parentesi per chiarire l'ordine con cui applichiamo le operazioni, come in aritmetica) le operazioni appena vista e creare proposizioni (espressioni logiche) più complesse:

“NOT  $((1 + 2 = 3) \text{ AND } (2 < 1))$ ”

si legge “non è vero che  $1 + 2 = 3$  e  $2 < 1$ ”. Qual è il valore di verità di tale affermazione? Bisogna prestare attenzione alle parentesi: “ $(1 + 2 = 3) \text{ AND } (2 < 1)$ ” è una proposizione falsa, e quindi negandola si ottiene una proposizione vera: l'affermazione è quindi vera.

## §2 L'implicazione

Abbiamo visto alcuni modi di connettere le proposizioni (NOT , AND , OR ) ed ottenere così nuove proposizioni sintatticamente corrette e con valore di verità decidibile a partire dai valori di verità delle parti costitutive. Introduciamo ora un altro modo di comporre due proposizioni: *l'implicazione*. Siano  $p$  e  $q$  due proposizioni. L'implicazione da  $p$  a  $q$  è la forma di ragionamento tipica, che prende la forma

“Se  $p$ , allora  $q$ .”

Si dice che  $p$  è la *ipotesi* (o anche, *antecedente*) e  $q$  è la *tesi* (o anche, *conseguente* o *conseguenza* di  $p$ ) dell'implicazione, e si indica graficamente anche con

“ $p \implies q$ ”.

L'implicazione è di utilizzo così frequente nelle dimostrazioni e negli enunciati che molti altri idiomi del gergo matematico hanno esattamente questo significato:

- ❑ “ $p$  implica  $q$ ”;
- ❑ “Da  $p$  segue  $q$ ”;
- ❑ “ $p$  solamente se  $q$ ”;

► Osserviamo che invece la proposizione “( NOT  $(1 + 2 = 3)$  ) AND ( NOT  $(2 < 1)$  )” è falsa: infatti è vera soltanto se le due affermazioni “NOT  $(1 + 2 = 3)$ ” e “NOT  $(2 < 1)$ ” sono entrambe vere; ma anche se la seconda è vera, la prima è falsa. Quindi quando si dice “non è vero che  $p$  e  $q$ ” non si intende “non è vero che  $p$  e non è vero che  $q$ ”, ma si intende che il fatto falso è che *entrambe* siano vere (cioè almeno una delle due è falsa).

- “ $p$  è condizione *sufficiente* per  $q$ ”;
- “Condizione *sufficiente* affinché  $q$  è che  $p$ ”;
- “ $q$ , se  $p$ ”;
- “ $q$  è condizione *necessaria* per  $p$ ”;
- “Condizione *necessaria* perché  $p$  è che  $q$ ”.

La *doppia implicazione* (indicata con “ $p \iff q$ ”) significa che  $p$  è condizione sia necessaria che sufficiente per  $q$ , cioè che

$$“(p \implies q) \text{ AND } (q \implies p)”$$

cioè che se  $p$  allora  $q$ , e se  $q$  allora  $p$ .

Riconosciamo quindi ragionevole che se  $p$  e  $q$  sono proposizioni valide, allora anche “ $p \implies q$ ” e “ $p \iff q$ ” sono proposizioni valide. Ma resta il fatto che dobbiamo capire quando una implicazione è vera e quando è falsa. Un modo consueto, che semplifica molto la trattazione, è quello di stabilire che una implicazione è vera o falsa solo in funzione del valore di verità della ipotesi e della tesi. Cioè, che “ $p \implies q$ ” sarà una affermazione vera (o falsa) non se in qualche modo riusciamo (o non riusciamo) a dedurre  $q$  da  $p$ , ma solo per i valori di verità (che supponiamo noti o in qualche modo decidibili) di  $p$  e  $q$ . Questo ci consente di considerare l'implicazione esattamente come la negazione, la congiunzione e la disgiunzione (cioè trattandola come un'operazione logica). Ora, vorremmo che almeno la seguente implicazione sia sempre vera:

$$“A \text{ AND } B \implies B”.$$

Cioè vorremmo che sia sempre vero che “se sia  $A$  che  $B$  sono vere, allora (in particolare)  $B$  è vera”. Questa è una implicazione che ha per ipotesi  $p =$  “sia  $A$  che  $B$  sono vere” e per tesi  $q =$  “ $B$  è vera”. Se  $A$  e  $B$  sono davvero vere, allora  $p$  è vera e  $q$  è vera. Se  $A$  è vera e  $B$  è falsa, allora  $p$  è falsa e  $q$  è falsa. Se  $A$  è falsa e  $B$  è vera, allora  $p$  è falsa e  $q$  è vera. Allora l'implicazione  $p \implies q$  deve risultare vera tutte le volte in cui  $p$  è vera e  $q$  è vera,  $p$  è falsa e  $q$  è falsa, e  $p$  è falsa e  $q$  è falsa. Non rimane che il caso in cui  $p$  è vera e  $q$  è falsa: in questo caso come riterremmo l'affermazione  $p \implies q$ ? È chiaro che non può che essere falsa. Infatti, non avrebbe senso definire una forma di implicazione se non si potesse usare nelle deduzioni logiche. Vorremmo poter usare forme di ragionamento del tipo “se  $p$  è vero e se  $p$  implica  $q$ , allora  $q$  è vero”. Ma questo ci impone di considerare l'implicazione falsa quando  $p$  è vero e  $q$  è falso. Abbiamo concluso quindi che  $p \implies q$  è vero sempre tranne quando  $p$  è vera e  $q$  è falsa (dalla premessa che il suo valore di verità dipenda solo dai valori di  $p$  e  $q$ ).

► Notiamo che questa frase è esattamente una frase del tipo *se...allora...*. Purtroppo fino a che non abbiamo deciso cosa sono  $p$  e  $q$ , la frase “ $p$  e  $q$  sono proposizioni valide” non è una proposizione valida... in quanto non abbiamo modo di immaginarne il valore di verità. Invece la frase “ $(1+1=2)$  e  $(1+1=3)$  sono proposizioni valide” è, lei stessa, una proposizione valida. Vedremo dopo come risolvere questo problema.

### I paradossi dell'implicazione logica

Questo modo di introdurre l'implicazione (anche detta implicazione materiale) è anti-intuitivo. Infatti l'ipotesi e la tesi possono non aver nessun legame; per esempio, si sa che l'universo è in espansione e che 7 è un numero primo, ed è quindi considerata vera la seguente affermazione "Se l'universo è in espansione allora 7 è un numero primo". Non solo: sorge il notevole paradosso che da una ipotesi falsa si può dedurre qualsiasi proposizione, sia vera che assurda: "Se  $2 = 3$ , allora la luna è fatta di mozzarella" è ancora una proposizione vera. Ancora: tutte le proposizioni vere (immaginabili) sono implicate tra di loro, così come anche tutte le proposizioni false lo sono. Naturalmente questi paradossi sono stati superati introducendo formalismi logici adeguati alla flessibilità e complessità del lin-

guaggio naturale, rinunciando però alla semplicità dei concetti qui presentati (semplicità che ha permesso di applicare questa logica bivalente alla progettazione di tutti i calcolatori elettronici, però). I limiti di questo approccio sono evidenti anche per altri paradossi. Alcune proposizioni, di cui a prima vista si può pensare che siano vere o false, risultano invece né vere né false (non perché non riusciamo a determinarne il valore di verità, ma perché è impossibile che ne abbiano uno). Per esempio, la proposizione autoreferente "Questa proposizione è falsa" è vera o falsa? Se fosse vera, sarebbe falsa, se fosse falsa, sarebbe vera. . . Epimenide di Cnosso, filosofo cretese del sesto secolo a.C., scrisse "Tutti i cretesi sono bugiardi". È come se uno dicesse "Mento sempre". Sta mentendo anche quando dice che mente? È chiaro che tutte queste proposizioni non hanno un valore di verità anche se sono linguisticamente corrette.

## §3 Schemi di ragionamento, sillogismi e deduzione per assurdo

Abbiamo motivato la definizione dell'implicazione richiedendo che le due implicazioni (deduzioni) " $p \text{ AND } q \implies q$ " e " $(p \text{ AND } (p \implies q)) \implies q$ " siano sempre vere, per qualsiasi scelta delle proposizioni  $p$  e  $q$ . Vedremo ora di esprimere altre regole di inferenza e deduzione logica, a loro volta dedotte dalle scelte fatte finora. Le seguenti forme, per esempio, sono considerate sempre valide:

- $A \text{ OR NOT } A$ : principio del terzo escluso, almeno una tra  $A$  e la sua negazione deve essere vera.
- $\text{NOT}(A \text{ AND NOT } A)$ : principio di non contraddizione, è sempre falso che  $A$  e la sua negazione siano entrambe vere.
- $(A \text{ AND } B) \implies B$ : se sia  $A$  che  $B$  sono vere, allora  $B$  deve essere vera.
- $(A \text{ AND } (A \implies B)) \implies B$ : se  $A$  è vera e da  $A$  segue  $B$ , allora  $B$ .
- $((A \implies B) \text{ AND } (B \implies C)) \implies (A \implies C)$ : se da  $A$  segue  $B$  e da  $B$  segue  $C$ , allora  $A$  implica  $C$ .
- $((A \text{ OR } B) \text{ AND } (\text{NOT } A)) \implies B$ : se almeno una tra  $A$  e  $B$  è vera ma  $A$  è falsa, allora  $B$  è vera.

Un modo molto utilizzato e un po' controverso è dato dalla *dimostrazione per assurdo*, che si basa sulla seguente equivalenza logica

$$(A \implies B) \iff (\text{NOT } B \implies \text{NOT } A),$$

► È paradossale che si cerchi di dedurre le regole di deduzione, naturalmente. Possiamo pensare semplicemente di esprimere in termini il più rigorosi possibili gli schemi di ragionamento che tutti accettano come validi, e poi usare questi per dedurre altri schemi di ragionamento. . . In effetti la *matematica dimostrazione* di una proposizione non è altro che una argomentazione, la cui correttezza può essere verificata se si rendono il più espliciti e chiari possibile gli schemi inferenziali utilizzati.

cioè dire che  $A$  implica  $B$  è *equivalente* a dire che  $\text{NOT } B$  implica  $\text{NOT } A$ . Se quindi voglio dimostrare che da  $A$  segue  $B$ , posso decidere di dimostrare la proposizione equivalente: dalla negazione di  $B$  segue la negazione di  $A$ ; in altre parole, per mostrare che se  $A$  è vera allora anche  $B$  è vera posso mostrare che se  $B$  è falsa allora anche  $A$  è falsa. La dimostrazione per assurdo procede in questo modo: se voglio dimostrare che una proposizione  $p$  è vera, mostro che se  $p$  fosse falsa, allora se ne deduce una affermazione certa altra affermazione  $q$ , ma in altro modo sappiamo che  $q$  è falsa. Cioè, mostriamo che da  $\text{NOT } p$  segue  $q$ , e che  $q$  è falsa. allora  $p$  è vera. Infatti, dato che  $\text{NOT } p \implies q$  è equivalente a  $\text{NOT } q \implies p$ , mostrare che  $\text{NOT } p \implies q$  significa mostrare che  $\text{NOT } q \implies p$ . Ora, se  $q$  è falsa quindi  $p$  deve essere vera. Vediamone un esempio.

⤵ Attenzione:  $A \implies B$  non è equivalente a  $\text{NOT } A \implies \text{NOT } B$ !  
**\*\*TODO\*\***

### (1.1) Esistono infiniti numeri primi.

*Dimostrazione.* Ricordiamo che un *numero primo* è un numero intero  $n > 1$  che non ha divisori diversi da 1 e  $n$ . Per esempio i primi numeri primi sono:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41. . .

L'affermazione che vogliamo dimostrare è:  $p =$  "Esistono infiniti numeri primi". Sua negazione è "Non esistono infiniti numeri primi", cioè "Esiste un numero finito di numeri primi". Supponiamo quindi che sia così. Ma allora è possibile calcolare il prodotto di tutti i numeri primi (che sarà un numero intero ben definito, visto che si tratta di eseguire un numero finito di moltiplicazioni). Chiamiamo  $N$  tale prodotto. È chiaro che ogni numero primo  $n$  è più piccolo di  $N$ ; non solo:  $N$  è divisibile per il primo  $n$ . Ora, definiamo il seguente numero:  $M = N + 1$ . Dato che tutti i numeri primi sono più piccoli di  $N$  e  $M$  è maggiore di  $N$ ,  $M$  non può essere un numero primo. Dal momento che ogni numero intero è il prodotto dei suoi fattori primi,  $M$  è uguale al prodotto di almeno 2 numeri primi: devono pertanto esistere un numero primo  $k$  e un numero  $m$ , tali che  $1 < k < M$  e  $1 < m < M$  e

$$M = km.$$

Ma anche  $N$  è divisibile per  $k$  (è divisibile per ogni numero primo!), per cui esiste un numero  $n$  (non necessariamente primo) tale che

$$N = kn.$$

Dal momento che per definizione  $M = N + 1$ , si ha

$$km = kn + 1 \implies k(m - n) = 1 \implies m - n = \frac{1}{k}.$$

⤵ visto che se  $n$  è un numero primo,  $N$  è il prodotto di  $n$  per un altro numero intero.

⤵ Cioè il resto della divisione di  $N$  per  $n$  è zero.

⤵ Cioè ogni numero si può scrivere come prodotto di un numero finito di numeri primi.

Ma  $m - n$  è un intero, perché differenza di interi, mentre  $\frac{1}{k}$  non è intero, dato che  $k > 1$ , e questo è assurdo. Sia  $q$  la proposizione “Esiste  $k \geq 2$  tale che  $\frac{1}{k}$  è un numero intero”. Abbiamo mostrato che  $\text{NOT } p \implies q$ , e che  $q$  è palesemente falsa. Deduciamo quindi che  $p$  deve essere vera.  $\square$

## §4 Quantificatori

Il lettore attento si sarà accorto che la maggior parte delle affermazioni enunciate nella dimostrazione dell'esempio appena visto è del tipo

Esiste un ... tale che...

Non esiste un ... tale che...

... per ogni numero ... succede che...

Per esempio, le espressioni “ $n$  è un numero primo” oppure “ $n$  è divisibile per  $k$ ”, non sono affatto proposizioni, dal momento che non hanno un valore di verità fino al momento in cui non si è (almeno) deciso qual è il valore delle variabili che vi compaiono. Tali espressioni vengono chiamate *proprietà*: frasi che diventano vere o false in funzione dei valori assunti dalle variabili. È chiaro quindi che si può trasformare una proprietà in una proposizione semplicemente *assegnando* un valore alle variabili libere. “ $n$  è un numero primo” è una proprietà (con variabile libera o argomento  $n$ ), ma se si assegna  $n = 4$  allora diventa “4 è un numero primo”, proposizione falsa. Un altro modo di rendere proposizione una proprietà è quello di utilizzare le forme “per ogni. . .” oppure “esiste ... tale che”. Consideriamo la proprietà “ $n$  è un numero primo”. Si intende che la variabile libera  $n$  (argomento) può prendere valori nell'insieme dei numeri interi (a meno di precisarne la natura in altro modo). Possiamo scrivere

Per ogni numero intero  $n$ ,  $n$  è un numero primo”

oppure

Esiste un numero intero  $n$ , tale che  $n$  è un numero primo”

Cioè, data una proprietà  $p$  (che ha variabile libera  $n$ , per esempio), si possono formare le proposizioni

► Sinonimi per proprietà: predicati, funzioni proposizionali, enunciati aperti, proposizioni aperte. Le variabili che vi compaiono vengono dette *variabili libere* se non hanno un valore predefinito, oppure *argomenti*.

► Si tenga presente che il simbolo “=” viene frequentemente usato in due modi del tutto diversi. Può essere parte costituente di una proposizione (“ $1 = 2$ ”) così come può essere usato per assegnare un valore ad una variabile (“ $n = 4$ ”). In questo ultimo caso “ $n = 4$ ” non è una proposizione logica valida, dal momento che serve solo ad assegnare a  $n$  il valore 4 senza avere valore di verità. Ma una volta assegnato il valore ad  $n$ , potremmo scrivere la proposizione “ $n = 2$ ” ed ottenere una proposizione valida, che in questo caso risulta falsa, dato che  $2 \neq 4$ . Spesso si capisce dal contesto in quale dei due sensi si usa il simbolo “=”, ma a volte può essere utile adottare due simboli diversi.

Per ogni  $n, p$ .

Esiste  $n$  tale che  $p$ .

che possono essere vere o false. Queste costruzioni trasformano una proprietà in una proposizione (oppure in una proprietà con meno variabili libere) e vengono detti *quantificatori*. La forma “Esiste un ... tale che ...” si dice *quantificatore esistenziale*. La forma “Per ogni ...” si dice *quantificatore universale*.

**(1.1) Teorema.** *La negazione della proposizione “Per ogni  $n, p$ ” è equivalente a “Esiste  $n$  tale che non è vero che  $p$ ”. La negazione della proposizione “Esiste  $n$  tale che  $p$ ” è equivalente a “Per ogni  $n$ , non è vero che  $p$ ”.*

*Dimostrazione.* Consideriamo la proposizione “Esiste  $n$  tale che  $p$ ”. Chiaramente la sua negazione è “Non esiste  $n$  tale che  $p$ ”. Analogamente, la negazione di “Esiste  $n$  tale che non è vero che  $p$ ” è “Non esiste  $n$  tale che non è vero che  $p$ ”. Ora, dovrebbe essere chiaro che “Non esiste  $n$  tale che non è vero che  $p$ ” è equivalente a

“Per ogni  $n, p$ .”

Ora, se neghiamo quest’ultima, tenuto conto della equivalenza appena vista, otteniamo “Non è vero che non esiste  $n$  tale che non è vero che  $p$ ”, cioè

Esiste  $n$  tale che non è vero che  $p$ .

Abbiamo dimostrato la prima parte del teorema. Per procedere con la seconda parte, sia  $q$  la proprietà “Non è vero che  $p$ ”. La proposizione “Esiste  $n$  tale che  $p$ ” diventa “Esiste  $n$  tale che non è vero che  $q$ ”, mentre “Per ogni  $n$ , non è vero che  $p$ ” diventa “Per ogni  $n, q$ ”. Possiamo riscrivere le due frasi come “Esiste  $n$  senza la proprietà  $q$ ” e “per ogni  $n, q$ ”. Di nuovo, “Non esiste  $n$  senza la proprietà  $q$ ” viene ragionevolmente pensato come equivalente a “per ogni  $n, q$ ”; ma  $q$  è la negazione di  $p$ , per cui la negazione della proposizione “Esiste  $n$  con la proprietà  $p$ ” è equivalente a “Per ogni  $n$ , non è vero che  $p$ ”.  $\square$

→ I seguenti idiomi sono equivalenti: “per tale  $n$  la proprietà  $q$  è vera”, “ $q(n)$  è vera”, “ $n$  ha la proprietà  $q$ ”.

Analizziamo un’altra dimostrazione elementare.

**(1.2)** Non esistono due numeri interi  $a$  e  $b$  tali che  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ .

*Dimostrazione.* **\*\*TODO\*\***  $\square$

## §5 Insiemi

Per insieme intendiamo ogni collezione  $X$  di oggetti  $x$  determinati e distinguibili della nostra intuizione o del nostro intelletto, che sia concepita come un tutto unico. Tali oggetti saranno chiamati *elementi* di  $X$ . Se  $x$  è un elemento di  $X$ , si dice anche che  $x$  appartiene a  $X$ . Un modo semplice per definire un insieme è elencandone gli elementi in una lista. Si usa separare le voci della lista con delle virgole e racchiuderla tra parentesi graffe, come per esempio

$$\begin{aligned} X &= \{1, 3, 5\} \\ Y &= \{a, b, af\} \\ Z &= \{1, 3, \{1, 3\}\} \end{aligned}$$

L'ordine con cui sono elencati non è importante, e anche se ci fossero ripetizioni gli oggetti vengono contati una sola volta:

$$\{1, 3, 1\} = \{1, 3\} = \{3, 1\}.$$

Due insieme sono ritenuti uguali quando hanno esattamente gli stessi elementi. A volte anche un elenco infinito può essere rappresentato, a patto di riuscire a far capire qual è la regola con cui continuare. Per esempio:

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 3, \dots\} \\ &\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\} \\ &\{2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots\} \\ &\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots\} \\ &\{2, 3, 5, 23, 29, 53, 59, 83, 89, 223, 229, \dots\} \end{aligned}$$

Un altro modo, più generale ma non esente da rischi, è quello di definire un insieme mediante una *proprietà*. Si considera un certo universo di oggetti (un insieme grande abbastanza da contenere tutti gli oggetti che stiamo immaginando, come i numeri interi, le figure piane, etc. etc.) e una proprietà  $p$  che questi oggetti possono soddisfare o no. Per esempio:

$$\begin{aligned} &\{\text{Tutti i numeri interi maggiori o uguali a } 1\} \\ &\{\text{Tutti i numeri pari}\} \\ &\{\text{Tutte le potenze di } 2\} \\ &\{\text{Tutti i numeri della successione di Fibonacci}\} \\ &\{\text{Tutti i numeri primi che contengono solo le cifre decimali } 0, 2, 3, 5, 6, 8, 9 \dots\} \end{aligned}$$

► Sinonimi di insieme: famiglia, classe, collezione, riunione.

► Forse non tutti immaginano come proseguire con le ultime due successioni di numeri interi. . .

In generale, quindi si scrive

$$\{\text{Tutti gli elementi } x \text{ che hanno la proprietà } p(x)\},$$

dove  $p$  è una proprietà (che dipende da  $x$ ). Naturalmente è sempre necessario sottointendere qual è l'universo cui appartengono gli elementi  $x$ .

L'insieme senza alcun elemento (per esempio, l'insieme di tutti i numeri naturali diversi da zero con quadrato nullo) si chiama *l'insieme vuoto*.

Si dice che un insieme  $X$  è un *sottoinsieme* di un insieme  $Y$  se ogni elemento di  $X$  è anche elemento di  $Y$ , cioè se per ogni elemento  $x$  di  $X$ ,  $x$  è elemento di  $Y$ . Due insiemi  $X$  e  $Y$  sono uguali quando hanno gli stessi elementi, per cui sono uguali se e solo se  $X$  è un sottoinsieme di  $Y$  e  $Y$  è un sottoinsieme di  $X$  (un oggetto appartiene a  $X$  se e solo se appartiene a  $Y$ ).

Dati due insiemi  $X$  e  $Y$  l'insieme *unione* di  $X$  e  $Y$  è l'insieme di tutti gli elementi che appartengono ad  $X$  o a  $Y$ , cioè è l'insieme

$$\text{UNIONE} := \{x \text{ tali che } x \text{ appartiene a } X \text{ OR } x \text{ appartiene a } Y\}$$

L'*intersezione* di due insiemi  $X$  e  $Y$  è l'insieme degli elementi comuni di  $X$  e  $Y$ , cioè

$$\text{INTERSEZIONE} := \{x \text{ tali che } x \text{ appartiene a } X \text{ AND } x \text{ appartiene a } Y\}.$$

Due insiemi si dicono *disgiunti* quando non hanno elementi in comune (cioè quando l'intersezione dei due è vuota).

## §6 Simboli, relazioni e funzioni

Per raggiungere un livello di chiarezza e rigore adeguato, il linguaggio matematico da sempre si arricchisce di simboli e abbreviazioni che consentono di rappresentare in modo sintetico gli oggetti e le relazioni tra di essi. Citando Alfred North Whitehead (1861 - 1947), *“By relieving the brain of all unnecessary work, a good notation sets it free to concentrate on more advanced problems, and in effect increases the mental power. . .”* (An Introduction to Mathematics, 1911). Si pensi per esempio alla notazione decimale 2005, 10,3145 per i numeri, ai simboli  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ ,  $\neq$ ,  $=$  per confrontarli, a  $+$ ,  $-$ ,  $/$ ,  $\sqrt{\quad}$  per le operazioni, all'utilizzo di lettere  $a$ ,  $b$ ,  $\dots$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $\dots$  dell'alfabeto per le variabili. Vediamo una tabella di simboli della teoria degli insiemi. Quando il simbolo rappresenta una proprietà (essere uguali, appartenere,  $\dots$ ), la

► Come abbiamo già osservato, il simbolo “=” di uguaglianza molto spesso viene utilizzato non per confrontare due oggetti ma per *assegnare* un valore ad una variabile libera. Si usa quindi “=” per l'uguaglianza e “:=” per l'assegnazione (o anche “=Def” o “≐”). Anche, in alcuni linguaggi per calcolatore “=” per l'assegnazione e “==” per l'uguaglianza.

### I paradossi della teoria degli insiemi

Questa definizione di insieme si sviluppa in quella che oggi è chiamata *teoria ingenua degli insiemi*. I due principi su cui si fonda sono il *principio di estensione* (cioè il fatto che un insieme è determinato dai suoi elementi e due insiemi sono uguali quando hanno gli stessi elementi) e il *principio di comprensione* (cioè gli insiemi si possono definire a partire da una proprietà che i suoi elementi devono soddisfare). Fu introdotta da Georg Cantor (1845 - 1918) nel modo seguente: *Unter einer 'Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unser Anschauung oder unseres Denkens (welche die 'Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen.* (Mathematische Annalen, XLVI (1895), pag 481 – la traduzione in italiano è l'inizio del paragrafo §5). Purtroppo questo modo di definire gli insiemi porta a notevoli paradossi. Il più noto è il *paradosso di Russell*: seguendo la definizione appena vista, nel 1901 Bertrand Russell propose di definire un insieme a partire dalla seguente proprietà  $R$ : “ $X$  appartiene ad  $X$ ”. Cioè, si prende un insieme e si verifica se l'insieme stesso è uno degli elementi dell'insieme. Se lo è, allora la proprietà  $R$  è vera, altrimenti è falsa. Consideriamo ora l'insieme  $M$  che ha per elementi tutti gli insiemi che *non soddisfano la proprietà  $R$* ,

cioè tutti gli insiemi che verificano la proprietà NOT  $R$ . Ora, l'insieme  $M$  così definito ha la proprietà  $R$  oppure no? Supponiamo di sì: allora, dato che  $M$  contiene esattamente tutti gli insiemi che *non* hanno la proprietà  $R$ , risulta che  $M$  non appartiene a  $M$ ... ma allora  $M$  non appartiene a se stesso e quindi non soddisfa la proprietà  $R$ ! Abbiamo mostrato che se  $M$  soddisfa la proprietà  $R$  allora non la soddisfa e questo è assurdo. Se invece  $M$  non soddisfa la proprietà  $R$ , allora  $M$  appartiene all'insieme di tutti gli insiemi che non soddisfano la proprietà  $R$  (cioè  $M$ ); dunque  $M$  appartiene a  $M$ ... cioè  $M$  soddisfa la proprietà  $R$ ! È chiaramente paradossale:  $M$  soddisfa la proprietà  $R$  se e solo se  $M$  non soddisfa la proprietà  $R$ ...

Forse si può rendere più semplice il paradosso inserendolo in un contesto meno formale: se un barbiere rade tutti quelli che non si radono da soli, lui si rade da solo oppure no? Se un catalogo di libri elenca tutti i libri che non citano se stessi, il catalogo cita se stesso oppure no? Di questo tipo è anche il paradosso di Berry: dato che le proprietà dei numeri si possono descrivere, è certo possibile definire numeri descrivendo una certa proprietà, e questa proprietà naturalmente è scritta con un numero finito di parole. Ma allora qual è “Il più piccolo numero che non si può definire con meno di quindici parole”?

Tabella 1.1: Tavola dei simboli insiemistici

Simbolo	Esempio	Significato
$\in$	$2 \in \{3, 56, 1, 2\}$	Appartenenza: 2 appartiene all'insieme $\{3, 56, 1, 2\}$
$\subset, \subseteq$	$\{2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$	Sottoinsieme: $\{2, 3\}$ è sottoinsieme di $\{1, 2, 3, 4\}$ .
$\supset, \supseteq$	$\{1, 2, 3, 4\} \supset \{2, 3\}$	Contiene: $\{1, 2, 3, 4\}$ contiene il sottoinsieme $\{2, 3\}$ .
$\emptyset$	$\emptyset = \{\}$	Insieme vuoto.
$=$	$\{1, 3, 2, 1\} = \{1, 2, 3\}$	I due insiemi sono uguali (hanno gli stessi elementi).
$\cup$	$\{1, 2\} \cup \{1, 4\} = \{1, 2, 4\}$	Unione dei due insiemi $\{1, 2\}$ e $\{1, 4\}$
$\cap$	$\{1, 2\} \cap \{1, 4\} = \{1\}$	Intersezione dei due insiemi $\{1, 2\}$ e $\{1, 4\}$
$\setminus$	$\{1, 2\} \setminus \{1, 4\} = \{2\}$	Differenza tra i due insiemi: $X \setminus Y = \{x \in X \text{ tali che } x \notin Y\}$

sua negazione si ottiene barrando il simbolo corrispondente (come per  $=$  e  $\neq$ ). Dato che tali simboli sono  $\in, \subset, \supset$  e  $=$ , le negazioni delle proprietà elencate saranno indicate quindi con  $\notin, \not\subset, \not\supset, \neq$ .

Una proprietà con due variabili libere (argomenti) viene detta *relazione*. Per esempio, “ $x$  è divisibile per  $y$ ”, “ $x$  è un elemento dell'insieme  $X$ ”, “ $X$  è sottoinsieme di  $Y$ ”, “ $x$  e  $y$  sono due numeri che hanno lo stesso segno”, “la somma dei numeri  $x$  e  $y$  è uguale a 1”. I due argomenti della relazione non necessariamente appartengono a due insiemi distinti, e spesso si deve capire dal contesto a quali insiemi si intende che appartengano. Di solito le relazioni vengono indicate in modo abbreviato con opportuni simboli, come nei casi visti sopra ( $<, \in, \subset, \dots$ ), evitando possibilmente l'uso di lettere.

► Le proprietà “ $x < y$ ”, “ $x \leq y$ ”, “ $x > y$ ”, “ $x \geq y$ ”, “ $x = y$ ”, “ $x \in X$ ”, “ $X \subset Y$ ”, “ $X \supset Y$ ” e “ $X = Y$ ” sono quindi tutte relazioni, così come le loro negazioni.

## Funzioni e procedure

L'analogia con i termini *funzione* e *procedura* utilizzati in informatica non deve trarre in inganno. Una funzione (procedura, sottoprogramma) in quel contesto significa una parte di un programma, che esegue uno specifico compito. Se anche è vero che una procedura prende un input  $x$  e calcola un output  $y$ , non è necessario che ad ogni  $x$  si associ un *unico*  $y$ . Per esempio, il valore restituito da una procedura potrebbe cambiare ogni volta

che la procedura viene eseguita dal calcolatore. Nel nostro caso questo non può assolutamente succedere: una funzione matematica non è definita come *procedura* ma esclusivamente dai valori che assume. D'altro canto non è vero che ogni funzione (matematica) si può implementare come procedura su un calcolatore (come si potrebbe in un primo momento ipotizzare). Anzi, si può dimostrare che la maggior parte delle funzioni non sono calcolabili mediante un programma.

Supponiamo che una relazione, definita per  $x \in X$  e  $y \in Y$  e indicata con  $R(x, y)$ , soddisfi la seguente proprietà:

“Per ogni elemento  $x$  dell'insieme  $X$  esiste un elemento  $y$  dell'insieme  $Y$  tale che  $R(x, y)$ , e tale  $y$  è unico.”

Allora la relazione  $R(x, y)$  permette di definire una *funzione* (che in questo caso indicheremo con la lettera  $f$ ) da  $X$  (che si dice *dominio* di  $f$ ) a  $Y$  (che si dice *codominio* di  $f$ ). Se  $x$  è un elemento di  $X$ , allora l'unico elemento  $y$  tale che  $R(x, y)$  è vera si indica con  $f(x)$ . Cioè, una funzione può essere vista come una procedura che permette di associare ad ogni elemento  $x \in X$  uno e un solo elemento  $y \in Y$  (chiamato *valore* della funzione in  $x$ , oppure *immagine* di  $x$ ), indicato con  $f(x) = y$ . In un certo senso la funzione  $f$  è una procedura che assegna ad un certo input  $x$  (che può essere un numero, una stringa di caratteri, una proposizione, ...) un ben determinato output  $f(x)$  (che può essere un numero, un valore di verità, una proposizione, ...). Per esempio,  $f(x) = x + 1$  se  $x$  è un numero intero è la funzione che associa ad  $x$  il suo successivo:  $f(4) = 5$ ,  $f(5) = 6$ , ... La notazione corrente è quella in cui il *valore* della funzione in  $x$  viene appunto indicato con  $f(x)$ . Nella pratica succede che se  $f$  è definita in termini di una *espressione* (una formula), si usa anche chiamare funzione l'espressione stessa,

Spesso succede che il dominio di una funzione è costituito da un insieme di numeri interi (finito o infinito). Sia  $a(k)$  una tale funzione, per esempio. Allora il valore della funzione associato all'intero  $k$  viene indicato con  $a_k$  invece che  $a(k)$ , e l'intero  $k$  viene detto *indice*. Questo consente di definire liste di elementi (chiamate anche *array*, vettori o successioni – quando infinite).

► Per esempio  $x^2 + 1$ ; la relazione  $R(x, y)$  da cui si parte è cioè  $y = x^2 + 1$  e quindi la funzione corrispondente è  $f(x) = x^2 + 1$

## Esercizi



### Esercizi da fare:

(Soluzioni a pagina 81)

- ☆☆ **1** Tre amici hanno appena finito di mangiare una pizza e devono pagare il conto di 30€ . Raccolgono 10€ ciascuno e danno i soldi al cameriere, che però dopo qualche minuto si accorge di aver sbagliato a calcolare le somme, e che il conto sarebbe dovuto essere di 25€ . Il cameriere decide quindi di restituire i 5€ in più, ma essendo italiano pensa di fare cosa gradita ai clienti restituendo solo 3€ (in modo che sia più facile dividere per 3) e tenendosi 2€ . I tre amici, vistisi resituire 1€ , finiscono con l'aver pagato 9€ ciascuno. Ora, se tre persone pagano 9€ , in totale ci sono 27€ , più 2€ per il cameriere: manca un euro per arrivare al totale di 30€ . Dove è finito?
- 2** Un paese è abitato da due tipi diversi di persone: i *gentiluomini* che possono solamente dire cose vere, e i *venditori*, che possono solamente dire cose false. Tre persone  $A$ ,  $B$  e  $C$  stanno conversando.  $A$  dice «Siamo tutti venditori.»  $B$  dice «Esattamente uno di noi è un gentiluomo.» Chi di loro è gentiluomo e chi no?
- 3** Di fronte a due porte ci sono due robot. Uno mente sempre, l'altro dice sempre la verità. Dietro una delle porte c'è l'uscita, dietro l'altra un mostro assassino. Con una sola domanda come fare a chiedere ai robot quale delle porte aprire?
- 4** Quali delle seguenti proposizioni sono la negazione della proposizione "Ogni essere vivente ha due occhi"?
- (a) Ogni essere vivente non ha due occhi.  
 (b) Tutti gli essere viventi hanno un occhio solo.  
 (c) Ci sono esseri viventi che non hanno due occhi.  
 (d) Nessuna delle precedenti.
- 5** Consideriamo vere le due seguenti proposizioni: "Tutti gli attori sanno recitare" e "Esistono dei bambini che non sono attori". Quali delle seguenti affermazioni si possono dedurre?
- (a) Alcuni bambini non sanno recitare.  
 (b) Non esistono bambini che sanno recitare.  
 (c) Non tutti i bambini sanno recitare.  
 (d) Nessuna delle precedenti.
- 6** La contronominale della proposizione "Se una persona fuma, allora dimagrisce" (chi fuma dimagrisce) è:
- (a) Chi non dimagrisce non fuma.  
 (b) Chi dimagrisce fuma.  
 (c) Chi non fuma non dimagrisce.  
 (d) Nessuna delle precedenti.
- 7** Sia  $p(x, y)$  la forma proposizionale " $x^2 + y^2 < 4$ ", dove  $x$  e  $y$  sono numeri interi. Vero o falso?
- (a)  $\forall x, \forall y : p(x, y)$ .  
 (b)  $\forall x, \forall y : \neg p(x, y)$ .  
 (c)  $\forall x, \exists y : p(x, y)$ .  
 (d)  $\forall x, \exists y : \neg p(x, y)$ .  
 (e)  $\exists x, \forall y : p(x, y)$ .  
 (f)  $\exists x, \forall y : \neg p(x, y)$ .  
 (g)  $\exists x, \exists y : p(x, y)$ .  
 (h)  $\exists x, \exists y : \neg p(x, y)$ .
- 8** Sia  $p(x, y)$  la funzione proposizionale  $(x^2 < 2) \vee (y^2 < 2)$ , dove  $x$  e  $y$  sono numeri interi. Vero o falso?
- (a)  $\forall x, \forall y : p(x, y)$ .  
 (b)  $\forall x, \forall y : \neg p(x, y)$ .  
 (c)  $\forall x, \exists y : p(x, y)$ .  
 (d)  $\forall x, \exists y : \neg p(x, y)$ .  
 (e)  $\exists x, \forall y : p(x, y)$ .  
 (f)  $\exists x, \forall y : \neg p(x, y)$ .  
 (g)  $\exists x, \exists y : p(x, y)$ .  
 (h)  $\exists x, \exists y : \neg p(x, y)$ .
- 9** Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- (a) Esattamente una di queste cinque affermazioni è falsa.  
 (b) Esattamente due di queste cinque affermazioni sono false.  
 (c) Esattamente tre di queste cinque affermazioni sono false.  
 (d) Esattamente quattro di queste cinque affermazioni sono false.  
 (e) Esattamente cinque di queste cinque affermazioni sono false.
- ☆ **10** Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- (a) Nessuna di queste cinque affermazioni è falsa.  
 (b) Esattamente una di queste cinque affermazioni è falsa.  
 (c) Esattamente due di queste cinque affermazioni sono false.  
 (d) Esattamente tre di queste cinque affermazioni sono false.  
 (e) Esattamente quattro di queste cinque affermazioni sono false.
- ☆ **11** Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- (a) Almeno una di queste cinque affermazioni è falsa.  
 (b) Almeno due di queste cinque affermazioni sono false.  
 (c) Almeno tre di queste cinque affermazioni sono false.  
 (d) Almeno quattro di queste cinque affermazioni sono false.  
 (e) Almeno cinque di queste cinque affermazioni sono false.