

CAPITOLO IV

Operatori hermitiani

§ 1. Prodotti scalari e hermitiani.

La nozione di prodotto scalare in \mathbb{R}^3 e si generalizza nel seguente modo:

(IV.1) Definizione. Sia V uno spazio lineare su \mathbb{R} . Un *prodotto scalare* su V è una applicazione (“funzione”)

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

che soddisfi:

- ① $(x, y) = (y, x)$ (simmetria)
- ② $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$ (linearità)
- ③ $(c x, y) = c(x, y)$ (omogeneità)
- ④ $(x, x) \geq 0$ e $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (positività)

Notiamo che, grazie alla proprietà 1) valgono anche:

$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z), \quad \text{e } (x, c y) = c(x, y).$$

Si può dunque dire che un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V è una applicazione simmetrica, “bilineare” (proprietà 2) e 3)) e definita positiva di $V \times V$ in \mathbb{R} .

(IV.2) Esempio. Sullo spazio standard \mathbb{R}^n delle n -uple di numeri reali si ha il prodotto scalare standard: se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, allora si pone:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

(IV.3) Esempio. Sempre in \mathbb{R}^n si possono porre “diversi” prodotti scalari. Per esempio, fissata una n -upla di numeri positivi $\mathbf{a} = a_1, a_2, \dots, a_n$, si può porre

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\mathbf{a}} = \sum_{i=1}^n a_i x_i y_i$$

(IV.4) Esempio (Prodotto scalare standard in $C(I)$). Sia $I = [a, b]$ un intervallo (chiuso e limitato) della retta reale, e consideriamo lo spazio delle funzioni continue $C(I)$ definite su I a valori reali.

Sappiamo che $C(I)$ è uno spazio vettoriale. Poniamo, per definizione,

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

Vogliamo verificare che $(\cdot, \cdot) : C(I) \times C(I) \rightarrow \mathbb{R}$ è un prodotto scalare.

Per prima cosa, notiamo che è ben definito. Infatti, se f e g sono funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato, lo è anche il loro prodotto, e quindi l'integrale $\int_a^b f g dx$ è un numero reale.

Le proprietà di simmetria, linearità e omogeneità sono ovvie. La proprietà di positività segue dal fatto che $(f, f) = \int_a^b f^2(x) dx$, e dunque $(f, f) \geq 0$. In particolare, $(f, f) = 0$ se e solo se $f = 0$ per tutti gli x , ovvero f è la funzione nulla, cioè lo zero dello spazio vettoriale $C(I)$.

Analogamente al caso di \mathbb{R}^n , se $\psi(x)$ è una funzione non negativa, la legge

$$(f, g)_{\psi} = \int_a^b f(x) g(x) \psi(x) dx$$

definisce un prodotto scalare in $C(I)$.

Consideriamo ora spazi vettoriali sui numeri complessi.

(IV.5) Definizione. Sia V uno spazio lineare su \mathbb{C} . Un *prodotto scalare*, detto anche, se è il caso di distinguere, un *prodotto hermitiano* su V è una funzione

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

che soddisfi:

- ① $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (simmetria hermitiana)
- ② $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$ (linearità)
- ③ $(x, c y) = c(x, y)$ (omogeneità)
- ④ $(x, x) \geq 0$ e $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (positività)

Notiamo che, grazie alla proprietà 1) e 2) valgono anche:

$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z), \quad \text{e } (cx, y) = \bar{c}(x, y).$$

Si può dunque dire che un prodotto scalare su uno spazio vettoriale complesso V è una applicazione simmetrica, *sesquilineare* (proprietà 2) e 3)) e definita positiva di $V \times V$ in \mathbb{C} .

(IV.6) Esempio. Il prodotto scalare standard in \mathbb{C}^n è definito nel seguente modo. Siano se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ elementi di \mathbb{C}^n . Il prodotto scalare (o hermitiano, o euclideo) standard è definito da

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i.$$

(IV.7) Esempio. Se $C(I; \mathbb{C})$ è lo spazio delle funzioni continue sull'intervallo $I = [a, b]$ a valori *complessi*, allora la legge

$$(f, g) = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx$$

dà luogo ad un prodotto hermitiano in $C(I; \mathbb{C})$.

Spazi euclidei e normati

(IV.8) (Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz) Sia $(V, (\cdot, \cdot))$ uno spazio euclideo. Allora, per ogni coppia v_1, v_2 vale che

$$(1) \quad |(v_1, v_2)|^2 \leq (v_1, v_1)(v_2, v_2),$$

e l'uguaglianza vale solo se $v_2 = cv_1$ (cioè se v_1 e v_2 sono linearmente dipendenti).

Dimostrazione. Se uno dei due vettori è nullo, la affermazione è vera. Quindi possiamo supporre che entrambi i vettori siano non nulli. Definiamo $x = (v_2, v_2)$, $y = (v_1, v_2)$ e consideriamo la combinazione lineare

$$\xi = xv_1 - yv_2$$

Dalla proprietà di positività del prodotto scalare, abbiamo $(\xi, \xi) \geq 0$. Dunque

$$0 \leq (\xi, \xi) = (xv_1 - yv_2, xv_1 - yv_2) = |x|^2(v_1, v_1) - \bar{x}y(v_2, v_1) - x\bar{y}(v_1, v_2) + |y|^2(v_2, v_2).$$

ovvero, sostituendo, le espressioni di x e y ,

$$|(v_2, v_2)|^2(v_1, v_1) - \overline{(v_2, v_2)}(v_1, v_2)(v_2, v_1) - (v_1, v_1)\overline{(v_1, v_2)}(v_1, v_2) + |(v_1, v_2)|^2(v_2, v_2) \geq 0.$$

Notando che $(v_i, v_i) > 0$ e che $(v_2, v_1) = \overline{(v_1, v_2)}$, si ottiene

$$0 \leq (v_2, v_2)^2(v_1, v_1) - (v_2, v_2)|(v_1, v_2)|^2,$$

e dunque, dividendo per (v_2, v_2) , si ha che

$$|(v_1, v_2)|^2 \leq (v_1, v_1)(v_2, v_2),$$

che è quello che si doveva mostrare. In particolare, notiamo che l'uguaglianza vale sse $\xi = 0$, ovvero sse v_1 e v_2 sono linearmente dipendenti. ■

► Si noti che nel caso complesso, è cruciale prendere il complesso coniugato delle componenti (e.g., in \mathbb{C}^n). Se si ponesse, in completa analogia con il caso reale,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

si otterrebbe una forma *bilineare* in \mathbb{C}^n , che non gode della proprietà di positività. Per rendersi conto di ciò, basta considerare, in \mathbb{C}^2 , il vettore $\eta = (1, i) \neq 0$. Allora,

$$(\eta, \eta) = 11 + i\bar{i} = 1 - i^2 = 2,$$

mentre

$$\langle \eta, \eta \rangle = 11 + ii = 1 + i^2 = 0$$

In uno spazio euclideo si può definire un concetto di *lunghezza* (detta *norma*) di un vettore. Definiamo *norma* di $v \in V$ la quantità

$$(2) \quad \|v\| = \sqrt{(v, v)}.$$

(IV.9) La norma di un vettore è una applicazione $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti proprietà

- ① $\|v\| \geq 0$, con ugualianza sse $v = 0$ (positività);
- ② $\|c v\| = |c| \|v\|$ (omogeneità);
- ③ $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$ (disuguaglianza triangolare).

Dimostrazione. Le prime due proprietà seguono immediatamente dalle proprietà 2 e 3 del prodotto scalare. Per l'ultima, osservato che la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz si può scrivere come

$$(3) \quad |(v_1, v_2)|^2 \leq \|v_1\|^2 \|v_2\|^2,$$

il che implica le due disuguaglianze

$$(v_1, v_2) \leq \|v_1\| \|v_2\|, \quad |\overline{(v_1, v_2)}| \leq \|v_1\| \|v_2\|.$$

Consideriamo

$$\begin{aligned} \|v_1 + v_2\|^2 &= (v_1 + v_2, v_1 + v_2) = (v_1, v_1) + (v_1, v_2) + \overline{(v_1, v_2)} + (v_2, v_2) = \\ &= \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + (v_1, v_2) + \overline{(v_1, v_2)}. \end{aligned}$$

Utilizzando le disuguaglianze di cui sopra, si ha

$$\|v_1 + v_2\|^2 \leq \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + 2\|v_1\| \|v_2\| = (\|v_1\| + \|v_2\|)^2$$

e dunque, dato che entrambi i membri di questa equazione sono numeri reali non negativi, la tesi si ottiene prendendo la radice quadrata. ■

Ortogonalità e sue prime applicazioni

Consideriamo uno spazio vettoriale V dotato di un prodotto interno (o hermitiano, se V è sui complessi) $(,)$.

(IV.10) Definizione. Due vettori v_1, v_2 si dicono ortogonali se $(v_1, v_2) = 0$.

Dalla definizione segue immediatamente che lo 0 di V è l'unico vettore di V ortogonale a se stesso. Infatti $(0, 0) = 0$, e $(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (proprietà 3 del prodotto euclideo/hermitiano).

(IV.11) Siano v_1, v_2 , non nulli e ortogonali; allora v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Sia $c_1v_1 + c_2v_2 = 0$ una combinazione lineare di v_1 e v_2 che dia 0. Dobbiamo verificare che $c_1 = c_2 = 0$. Dal fatto che $(0, 0) = 0$ abbiamo

$$0 = (c_1v_1 + c_2v_2, c_1v_1 + c_2v_2)$$

Sviluppando questa uguaglianza si ha (consideriamo il caso hermitiano)

$$0 = \bar{c}_1c_1(v_1, v_1) + \bar{c}_1c_2(v_1, v_2) + \bar{c}_2c_1(v_2, v_1) + \bar{c}_2c_2(v_2, v_2).$$

Dato che $(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$ sono per ipotesi nulli, ne otteniamo

$$0 = |c_1|^2(v_1, v_1) + |c_2|^2(v_2, v_2)$$

I due addendi del membro destro sono non negativi, e dunque deve valere $|c_1|^2(v_1, v_1) = |c_2|^2(v_2, v_2) = 0$; dato che i vettori v_1, v_2 non sono nulli (e dunque $(v_i, v_i) > 0$), ne possiamo concludere che $c_1 = c_2 = 0$. ■

Osserviamo che, più in generale, vale la seguente proprietà: Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ un insieme di vettori non nulli di V , che soddisfino

$$(v_i, v_j) = 0, \quad i \neq j = 1, \dots, k.$$

Allora questi vettori sono linearmente indipendenti. Infatti basta notare che, detto $\xi = \sum_{i=1}^k x_i v_i$, si ha

$$(\xi, \xi) = \sum_{i,j=1}^k x_i \bar{x}_j (v_i, v_j) = \sum_i |x_i|^2 (v_i, v_i).$$

(IV.12) Esempio. Nello spazio \mathbb{R}^n , questa proprietà, applicata a vettori $v_i = e_i$, dove e_i è la n -upla data da $(0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{posto } i}, 0, \dots, 0)$, ribadisce che

questi vettori sono indipendenti. Peraltro, garantisce che, per esempio, i vettori $v = (1, 1, 0, \dots, 0)$ ed $u = (1, -1, 0, \dots, 0)$ sono indipendenti. ■

(IV.13) Esempio. Consideriamo lo spazio delle funzioni (diciamo continue) $C([-\pi, \pi])$ nell'intervallo $I = [-\pi, \pi]$, e i vettori $u_n \in C([-\pi, \pi])$ definiti da

$$u_0(x) = 1, \quad u_{2n-1}(x) = \cos(nx), \quad u_{2n}(x) = \sin(nx), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Questo insieme (o sistema, o famiglia) di vettori è ortogonale. Infatti, consideriamo $n \neq m$ e il prodotto scalare

$$(u_n, u_m) = \int_{-\pi}^{\pi} u_n(x) u_m(x) dx.$$

Ora, se n è nullo, abbiamo $(u_0, u_m) = \int_I u_n(x) dx = 0$; supponiamo che sia n che m siano non nulli e (per esempio), sia $n = 2k - 1, m = 2l$. Allora si ha

$$(u_n, u_m) = \int_I \cos(kx) \sin(lx) dx$$

► Una conseguenza di questa proprietà è che, presi $n + k$ vettori v_α non nulli in uno spazio vettoriale euclideo V_n di dimensione n deve aversi, per qualche $\alpha, \beta, (v_\alpha, v_\beta) \neq 0$. Viceversa, una base di V_n formata da vettori ortogonali a due a due si chiama *base ortogonale*. In particolare, se questi vettori sono tutti di norma uguale a 1, la base si dice *base ortonormale*. Ad esempio, la terna (i, j, k) è una base ortonormale dello spazio euclideo \mathbb{R}^3 , dotato del prodotto scalare standard.

Integrando per parti si ha

$$(u_n, u_m) = \frac{1}{k} \sin(kx) \sin(lx) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{l}{k} \int_I \sin(kx) \cos(lx) dx.$$

dato che le funzioni sono periodiche otteniamo

$$(u_n, u_m) = -\frac{l}{k} \int_I \sin(kx) \cos(lx) dx.$$

Se $k = l$, abbiamo dunque $(u_n, u_m) = -(u_n, u_m)$ e dunque $(u_n, u_m) = 0$. se $k \neq l$, si ha, analogamente,

$$\int_I \sin(kx) \cos(lx) = -\frac{l}{k} \int_I \cos(kx) \sin(lx) dx$$

e dunque otteniamo che

$$(u_{2k-1}, u_{2l}) = \frac{l^2}{k^2} (u_{2k-1}, u_{2l})$$

che dimostra che $(u_{2k-1}, u_{2l}) = 0, \forall k, l$. Il caso n, m entrambi pari o dispari si tratta analogamente. Dunque gli u_n sono un sistema ortogonale in $C([- \pi, \pi])$. Ricordando che

$$\int_I \cos^2(nx) dx = \int_I \sin^2(nx) dx = \pi$$

e osservando che $(u_0, u_0) = 2\pi$ si vede che la famiglia

$$v_0 = \frac{u_0}{\sqrt{2\pi}}, v_n = \frac{u_n}{\sqrt{\pi}}$$

è ortonormale in $C([- \pi, \pi])$ ■

(IV.14) Esempio (La generalizzazione dell'esempio precedente alle funzioni complesse). Sia $V_{\mathbb{C}}$ lo spazio delle funzioni periodiche da $I = [-\pi, \pi]$ a valori complessi. Consideriamo, in $V_{\mathbb{C}}$ la famiglia $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ definita da:

$$(4) \quad e_0(x) = 1, \quad e_n(x) = e^{inx}, \quad n \neq 0.$$

Questa è una famiglia ortogonale. Infatti, consideriamo il prodotto scalare

$$(e_n, e_m) = \int_I \overline{e_n(x)} e_m(x) dx = \int_I e^{-inx} e^{imx} dx \equiv \int_I e^{i(n-m)x} dx$$

Supponiamo $n \neq m$. Integrando

$$(e_n, e_m) = \frac{1}{i(n-m)} \Big| e^{i(n-m)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

per la periodicità della funzione esponenziale con argomento immaginario. Se, ora, $n = m$ (eventualmente entrambi = 0) abbiamo

$$(e_n, e_n) = \int_I 1 dx = 2\pi.$$

Dunque la famiglia *ortonormale* corrispondente alla famiglia e_n si ottiene come $v_n = \frac{e_n}{\sqrt{2\pi}}$. ■

Basi ortonormali godono di una proprietà fondamentale, ovvero che le componenti dello sviluppo di un generico vettore v sulla base in questione si calcolano attraverso prodotti scalari. Ovvero, vale che

(IV.15) Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una (qualsiasi) base ortonormale in V_n . Lo sviluppo dell'elemento $v \in V$ lungo V è dato da

$$(5) \quad v = \sum_i v_i e_i, \text{ con } v_i = (v, e_i).$$

In altre parole, le componenti di v lungo la base e_i sono i prodotti scalari (e_i, v) .

Dimostrazione. Dato che e_i sono una base, lo sviluppo

$$v = \sum_i v_i e_i$$

è univocamente determinato. Scegliamo un indice k e prendiamo il prodotto scalare (e_k, v) di entrambi i membri di questa uguaglianza; a sinistra abbiamo (v, e_k) , mentre a destra (grazie alla linearità del prodotto euclideo)

$$\sum_i v_i (e_k, e_i) = v_k \text{ perchè } (e_k, e_i) = 0 \text{ se } i \neq k, \text{ e vale } 1 \text{ per } i = k.$$

(IV.16) (Formule di Parseval) Sia V_n uno spazio vettoriale (complesso) di dimensione finita, e $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ una sua base ortonormale. Allora, per ogni coppia di vettori $x, y \in V_n$,

$$(6) \quad (y, x) = \sum_{i=1}^n \overline{(e_i, y)} (e_i, x).$$

In particolare, $\|x\|^2 = \sum_i |(e_i, x)|^2$.

Dimostrazione. Scriviamo, secondo la (5),

$$x = \sum_i (e_i, x) e_i$$

e calcoliamo (y, x) ; sfruttando sempre la linearità di (\cdot, \cdot) abbiamo

$$(y, x) = (y, \sum_i (e_i, x) e_i) = \sum_i (y, (e_i, x) e_i) = \sum_i (e_i, x) (y, e_i) = \sum_i \overline{(e_i, y)} (e_i, x),$$

come affermato. La seconda affermazione si ottiene prendendo $y = x$. ■

In dimensione infinita abbiamo la nozione di *sistema ortonormale completo*

(IV.17) Definizione. Sia V uno spazio vettoriale (complesso) di dimensione infinita, e $\{e_i\}_{i=1,2,\dots}$ un insieme di vettori ortonormali. Tale sistema si dice completo se, per ogni $x \in V$ si ha

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} (e_i, x) e_i.$$

► nel senso che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - \sum_{i=1}^n (e_i, x) e_i\| = 0$$

Valgono allora le formule di Parseval: $(y, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{(e_i, y)} (e_i, x)$ e, in particolare,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(e_i, x)|^2.$$

§ 2. Operatori Hermitiani (simmetrici)

Il problema di determinare se e quando un operatore è diagonalizzabile non è di facile risoluzione. In questa ultima lezione introdurremo una classe di operatori lineari, detti operatori *Hermitiani* definiti su spazi euclidei (complessi), per i quali vale un teorema di diagonalizzazione.

(IV.18) Definizione. Consideriamo uno spazio vettoriale euclideo complesso $(V, (,))$; sia $L : V \rightarrow V$. L'operatore aggiunto o coniugato hermitiano di L è quell'operatore L^\dagger che verifica

$$(7) \quad (y, Lx) = (L^\dagger y, x) = \overline{(x, L^\dagger y)}, \quad \forall x, y \in V.$$

Per definizione, $(L_1 + L_2)^\dagger = L_1^\dagger + L_2^\dagger$, e $(zL)^\dagger = \bar{z}L^\dagger$.

(IV.19) Esempio. Se V è di dimensione finita, l'aggiunto di un operatore esiste sempre. In particolare, se $\mathbf{L} = (\ell_{ij})$ è la rappresentazione matriciale di L rispetto ad una base ortonormale $\{e_i\}_{i=1,\dots,N=\dim V}$, gli elementi di matrice $[\mathbf{L}^\dagger]_{ij}$ sono dati dai *complessi coniugati* degli elementi della matrice trasposta \mathbf{L}^T , ovvero, in formule,

$$\ell_{ij}^\dagger = \bar{\ell}_{ji}$$

Per rendersi conto di questo fatto, basta ricordare che rispetto ad una base ortonormale, l'elemento di matrice ℓ_{ij} si calcola come

$$\ell_{ij} = (e_i, L(e_j))$$

Dunque, l'elemento ℓ_{ij}^\dagger è

$$\ell_{ij}^\dagger = (e_i, L^\dagger(e_j)) = \overline{(L^\dagger(e_j), e_i)} = \overline{(e_j, L(e_i))} = \bar{\ell}_{ji},$$

dove, il primo termine è la *definizione* di elemento di matrice rispetto ad una base ortonormale, nella seconda uguaglianza si è usata (“al contrario”) la definizione di aggiunto di un operatore, e nella terza ancora la definizione di elemento di matrice. ■

Per comodità, data una matrice L , si chiama matrice aggiunta (o, anche, coniugata Hermitiana) di L , la matrice il cui elemento di posto i, j è il complesso coniugato dell'elemento di posto j, i della matrice L . In poche parole, la matrice aggiunta è la coniugata della trasposta (o la trasposta della coniugata).

► Nel caso reale, la matrice aggiunta si riduce alla matrice trasposta.

(IV.20) Esempio. Sia $C^\infty([a, b])$ lo spazio delle funzioni periodiche definite sull'intervallo $[a, b]$, derivabili un numero arbitrario di volte, dotato del prodotto euclideo

$$(f, g) = \int_a^b \overline{f(x)}g(x) dx,$$

e consideriamo l'operatore \hat{d} , che associa ad $f(x)$ la sua derivata. Verifichiamo che $\hat{d}^\dagger = -\hat{d}$.

$$(f, \hat{d}(g)) = \int_a^b \overline{f(x)} \frac{d}{dx}(g(x)) dx = (\text{integrando per parti})$$

$$\overline{f(x)}g(x) \Big|_a^b - \int_a^b \left(\frac{d}{dx}\overline{f(x)}\right)g(x) dx =$$

(dato che le funzioni sono periodiche)

$$= \int_a^b -\frac{d}{dx}(\overline{f(x)})g(x) dx = (-\hat{d}f, g).$$

■

(IV.21) Esempio. Oltre all'operatore di derivazione, nella formulazione di Schrödinger della meccanica quantistica rivestono fondamentale importanza gli operatori di moltiplicazione per una funzione assegnata (che, almeno nei casi più semplici, non è nient'altro che il potenziale di un campo di forze). Consideriamo lo spazio delle funzioni continue $C^\infty([a, b])$, su $[a, b]$, e sia $V(x)$ una funzione assegnata (e.g., $V(x) = \kappa x^2$). L'operatore di *moltiplicazione per* $V(x)$ è la trasformazione lineare definita da

$$\hat{V}(f)(x) = V(x) f(x)$$

cioè, l'operatore che assegna ad $f(x)$ la funzione $V(x) f(x)$. ■

(IV.22) Definizione. Un operatore si chiama autoaggiunto o *hermitiano* se $L = L^\dagger$; una matrice si chiama autoaggiunta o *hermitiana* se è uguale alla sua aggiunta. Un operatore si dice *antiautoaggiunto* (o *anti hermitiano*) se il suo aggiunto è il suo opposto (cioè, $L + L^\dagger = 0$). Osserviamo che se L è hermitiano, iL è antihermitiano e viceversa.

► Nel caso reale, una matrice hermitiana è una matrice che coincide con la sua trasposta, ed è detta più comunemente *matrice simmetrica* (omettendo rispetto alla riflessione secondo la diagonale principale).

(IV.23) Esempio (Operatori di Schrödinger magnetici). ■

(IV.24) Proposizione. Se λ è un autovalore di un operatore hermitiano H , allora λ è reale ($\bar{\lambda} = \lambda$); nel caso di operatori antihermitiani, λ è immaginario puro.

Dimostrazione. Se λ è un autovalore di H , allora esiste un vettore non nullo ψ tale che

$$H\psi = \lambda\psi, \Rightarrow (\psi, H\psi) = (\psi, \lambda\psi) = \lambda(\psi, \psi);$$

Ma $(\psi, H\psi) = (H^{\dagger}\psi, \psi)$; dato che $H^{\dagger} = H$, quest'ultima equazione diventa $(\lambda\psi, \psi) = \bar{\lambda}(\psi, \psi)$. ■

(IV.25) Esempio. La nozione di aggiunto di un operatore *dipende* dalla nozione di prodotto scalare sullo spazio. Consideriamo lo spazio $C^{\infty}([0, \pi]; \mathbb{C})$ delle funzioni derivabili un numero infinito di volte sull'intervallo $[0, \pi]$, e definiamo

$$(f, g)_1 := \int_0^{\pi} \overline{f(x)}g(x) \sin(x) dx.$$

Per quanto detto sui prodotti scalari su spazi di funzioni, $(\cdot, \cdot)_1$ è un prodotto scalare in $C^{\infty}([0, \pi]; \mathbb{C})$, dato che nell'intervallo in questione, $\sin(x)$ è non negativa. Calcoliamo l'aggiunto dell'operatore di derivazione rispetto ad x , $\hat{\partial}_x$, rispetto a $(\cdot, \cdot)_1$. Dobbiamo dunque trovare un operatore M tale che, per ogni coppia di elementi di $C^{\infty}([0, \pi]; \mathbb{C})$, sia vera l'uguaglianza

$$(8) \quad (f, \hat{\partial}_x g) \equiv \int_0^{\pi} \overline{f(x)}g'(x) \sin(x) dx = \int_0^{\pi} \overline{M(f)(x)}g(x) \sin(x) dx.$$

Per fare questo, integriamo per parti $\int_0^{\pi} \overline{f(x)}g(x)' \sin(x) dx$ ed otteniamo

$$\int_0^{\pi} \overline{f(x)}g(x) \sin(x) dx = \overline{f(x)}g(x) \sin(x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{d}{dx}(\overline{f(x)} \sin(x))g(x) dx.$$

Il primo termine di questa somma non contribuisce, perchè $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$; il secondo è

$$- \int_0^{\pi} \overline{f'(x)}g(x) \sin(x) dx - \int_0^{\pi} \overline{f(x)}g(x) \cos(x) dx.$$

Il primo termine va "bene", mentre nel secondo bisogna moltiplicare e dividere per $\sin(x)$; così facendo si ha, per ogni coppia di funzioni,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \overline{f(x)}g(x) \sin(x) dx &= - \int_0^{\pi} \overline{f'(x)}g(x) \sin(x) dx - \int_0^{\pi} (\overline{f(x)}g(x) \tan(x)) \sin(x) dx \\ &= - \int_0^{\pi} (\overline{f'(x) + f(x) \tan(x)})g(x) \sin(x) dx. \end{aligned}$$

Ne concludiamo che l'aggiunto dell'operatore di derivazione, rispetto al prodotto scalare $(\cdot, \cdot)_1$ è dato dalla formula:

$$(\partial_x^\dagger(f))(x) = -(f'(x) + \tan(x)f(x)).$$

Proprietà spettrali degli operatori autoaggiunti

Nella sezione precedente, abbiamo visto che autovettori di un operatore qualsiasi relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti. Per operatori Hermitiani, vale una proprietà più forte, ovvero:

(IV.26) Proposizione. *Siano λ_1 e λ_2 due autovalori distinti di un operatore Hermitiano $H : V \rightarrow V$, e siano ψ_1 e ψ_2 due autovettori relativi, ovvero,*

$$(9) \quad H\psi_1 = \lambda_1\psi_1, \quad H\psi_2 = \lambda_2\psi_2, \quad \text{con } \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad \psi_i \neq 0, \quad i = 1, 2.$$

Allora ψ_1 e ψ_2 sono ortogonali.

Dimostrazione. Da un lato

$$(\psi_1, H\psi_2) = (\psi_1, \lambda_2\psi_2) = \lambda_2(\psi_1, \psi_2)$$

Dall'altro (utilizzando $H = H^\dagger$ e il fatto che gli autovalori sono reali),

$$(\psi_1, H\psi_2) = (H^\dagger(\psi_1), \psi_2) = (H\psi_1, \psi_2) = (\lambda_1\psi_1, \psi_2) = \lambda_1(\psi_1, \psi_2)$$

Sottraendo queste due relazioni si ha

$$0 = (\psi_1, H\psi_2) - (\psi_1, H\psi_2) = (\lambda_2 - \lambda_1)(\psi_1, \psi_2).$$

Dato che abbiamo supposto $\lambda_1 \neq \lambda_2$ deve essere $(\psi_1, \psi_2) = 0$.

Una generalizzazione della proprietà qui sopra è la seguente. Dato uno spazio Euclideo V , ed un suo sottospazio vettoriale, $W \subset V$, il *complemento ortogonale* W^\perp di W in V è definito nel seguente modo:

$$(10) \quad W^\perp := \{y \in V \text{ t.c. } (y, x) = 0, \quad \forall x \in W\},$$

o, a parole, è l'insieme (che si dimostra essere un sottospazio vettoriale di V) di tutti quei vettori che sono ortogonali (secondo (\cdot, \cdot)) a ogni elemento del sottospazio assegnato W .

(IV.27) Proposizione. *Sia $H : V \rightarrow V$ un operatore hermitiano, e sia W un sottospazio invariante per H , ovvero tale che*

$$(11) \quad x \in W \implies Hx \in W.$$

Allora anche il suo complemento ortogonale W^\perp è invariante sotto H , ovvero

$$(12) \quad y \in W^\perp \implies Hy \in W^\perp.$$

► La semplicità della dimostrazione di questa proposizione non rende giustizia alla sua importanza. Di fatto, la proprietà di ortogonalità di autovettori relativi ad autovalori differenti è l'elemento cruciale che assicura la diagonalizzabilità di operatori (matrici) Hermitiani.

Dimostrazione. Esplicitando la (12), dobbiamo dimostrare che per tutti gli y tali che $(y, x) = 0, \forall x \in W$ succede che $(x, Hy) = 0, \forall x \in W$. Ora:

$$(x, Hy) = ((H^t x), y) = (H \text{ è hermitiano}) = (Hx, y), \forall x, y.$$

Ma, se $x \in W, Hx \in W$ per l'ipotesi (11), e quindi $(Hx, y) = 0$, dato che $y \in W^\perp$. Dunque $(x, Hy) = 0$ se $x \in W$, ovvero $Hy \in W^\perp$. ■

Ad un operatore autoaggiunto si può associare la sua forma quadratica, un polinomio omogeneo di secondo grado, a valori reali.

(IV.28) Definizione. Sia $H: V \rightarrow V$ un operatore autoaggiunto. La forma quadratica associata è data da

$$Q_H(x) = (x, Hx).$$

► Osserviamo che Q_H ha valori reali: infatti $(x, Hx) = \overline{(Hx, x)} = (Hx, x)$.

(IV.29) Esempio. In dimensione finita abbiamo

$$Q_H(x) = (x, Hx) = \sum_{i,j} \ell_{ij} \bar{x}_i x_j.$$

► Si osservi che $\overline{Q_H(x)} = \sum_{i,j} \overline{\ell_{ij} \bar{x}_i x_j} = \sum_{i,j} \ell_{ji} \bar{x}_j x_i = Q_H(x)$.

Osserviamo che, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, per ogni $x \in V$ abbiamo

$$|Q_H(x)| \leq \left(\sum_{i,j} \|\ell_{ij}\|^2 \right)^{1/2} \|x\|^2.$$

È rilevante la seguente caratterizzazione variazionale del primo autovalore di un operatore hermitiano, come minimo del cosiddetto *quoziente di Rayleigh*.

(IV.30) Proposizione. Sia V uno spazio euclideo finito dimensionale e H un operatore hermitiano. Consideriamo

$$(13) \quad \mu = \inf_{x \neq 0} \frac{(x, Hx)}{(x, x)}.$$

Allora μ è un autovalore ed è il più piccolo autovalore di H .

Dimostrazione. Se λ è un autovalore di H e ψ l'autovettore corrispondente abbiamo, come già osservato

$$\lambda = \frac{(\psi, H\psi)}{(\psi, \psi)} \geq \inf_{x \neq 0} \frac{(x, Hx)}{(x, x)} = \mu.$$

Ora proviamo che μ stesso è un autovalore. Osserviamo preliminarmente che l'estremo inferiore in (13) è un minimo, cioè è raggiunto. Infatti, sostituendo

$x \mapsto x/\sqrt{(x,x)}$ possiamo ricondurci alla minimizzazione della forma quadratica sulla sfera unitaria:

$$\inf_{x \neq 0} \frac{(x, Hx)}{(x, x)} = \inf_{(x,x)=1} (x, Hx).$$

Per Teorema di Weierstrass esiste un minimo, poichè la funzione Q_H è continua e la sfera è chiusa e limitata. Sia ψ un punto di minimo del quoziente di Rayleigh: in base al principio di Fermat, in un tale minimo il differenziale del quoziente si deve annullare. Calcoliamo, per una generica forma quadratica Q_H , il differenziale $dQ_H(x)h$. Abbiamo

$$\begin{aligned} Q_H(x+h) - Q_H(x) &= (x, Hx) + (h, Hx) + (x, Hh) + (h, Hh) - (x, Hx) \\ &= (h, Hx) + \overline{(h, Hx)} + (h, Hh) = 2 \operatorname{Re}(h, Hx) + o(\|h\|). \end{aligned}$$

Pertanto abbiamo

$$dQ_H(x)h = 2 \operatorname{Re}(h, Hx).$$

Tale formula vale per ogni operatore autoaggiunto, e quindi anche per l'identità, la cui forma quadratica associata altro non è che la norma al quadrato. Detto φ il punto di minimo, il differenziale del quoziente si deve annullare, e quindi, per ogni $h \in V$

$$dQ_H(\varphi)h Q_I(\varphi) - Q_H(\varphi) dQ_I(\varphi)h = 0.$$

In altre parole, per ogni $h \in V$ si ha, posto $\mu = Q_H(\varphi)/Q_I(\varphi) = Q_H(\varphi)/(\varphi, \varphi)$

$$dQ_H(\varphi)h - \mu dQ_I(\varphi)h = 0,$$

e dunque, per ogni $h \in V$

$$2 \operatorname{Re}(h, H\varphi) - 2\mu \operatorname{Re}(h, \varphi) = 0.$$

Sostituendo a ih ad h otteniamo anche, per ogni h ,

$$2 \operatorname{Im}(h, H\varphi) - 2\mu \operatorname{Im}(h, \varphi) = 0.$$

E dunque, necessariamente

$$H\varphi = \mu\varphi. \quad \blacksquare$$

Da questi risultati segue la diagonalizzabilità di un operatore Hermitiano H , ovvero che H ammette una base di autovettori.

(IV.31) Teorema. *Sia V uno spazio euclideo di dimensione n e H un operatore hermitiano. H ammette una base ortonormale di autovettori (ψ_1, \dots, ψ_n) , corrispondenti agli autovalori $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, così caratterizzati:*

$$(14) \quad \lambda_k = \min_{\substack{x \neq 0 \\ (x, \psi_j) = 0, j=1, \dots, k-1}} \frac{(x, Hx)}{(x, x)}.$$

► vedremo fra un momento che è differenziabile

► Il Teorema di Weierstrass asserisce che, in uno spazio euclideo di dimensione finita, ogni funzione reale continua su un insieme chiuso e limitato ammette massimo e minimo.

Dimostrazione. L'argomento procede per ricorsione. Al primo passo, poniamo $H = H_1$ e $V = V_1$. Si considera dapprima λ_1 il minimo del quoziente di Rayleigh in (13), che sappiamo essere un autovalore, per la Proposizione precedente. In corrispondenza di λ_1 , esiste almeno un autovettore ψ_1 ,

$$H_1\psi_1 = \lambda_1\psi_1$$

Considero allora $V_1 := \{\text{spazio generato da } \psi_1\}$, e, soprattutto, il suo complemento ortogonale

$$V_1^\perp = \{x \in V : (x, \psi_1) = 0\}.$$

Per la proposizione (IV.27), H definisce un operatore

$$H_2 := H|_{V_1^\perp} : V_1^\perp \rightarrow V_1^\perp.$$

Questo operatore è ben definito ed Hermitiano. Quindi posso tornare al passo 1, e riapplicare l'argomento. Dopo un numero $N = \dim(V)$ di passi si costruisce la base richiesta. ■

Il procedimento qui sopra illustra anche l'ultima particolarità saliente degli operatori Hermitiani. Consideriamo la sequenza degli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, e quella degli autovettori relativi $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}$. Per costruzione, gli ψ_j sono ortogonali l'un l'altro, i.e., $(\psi_i, \psi_j) = 0, i \neq j$. Quindi, eventualmente dividendo per $\|\psi_j\|$, posso considerare una nuova sequenza di autovettori $\{\psi'_1, \psi'_2, \dots, \psi'_N\}$, fatta da vettori *ortonormali*, i.e.,

$$(\psi'_i, \psi'_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Se $\{v_k\}$ è una base ortonormale di V (e.g., la base standard in \mathbb{C}^N), allora una matrice \mathbf{U} che diagonalizza (la matrice \mathbf{H} rappresentativa di) H , si ottiene giustapponendo le colonne delle componenti degli autovettori ψ'_i rispetto alla base considerata.

La aggiunta di \mathbf{U} è la matrice la cui i -esima riga è formata dai complessi coniugati di queste componenti. Consideriamo il prodotto della matrici $\mathbf{U}^\dagger \cdot \mathbf{U}$. L'elemento di posto k, j , è, per definizione, la somma termine a termine (su l) dei prodotti degli elementi di posto k, l di \mathbf{U}^\dagger (cioè il complesso coniugato della componente l -esima del k -esimo autovettore) per gli elementi di posto l, j di \mathbf{U} , ovvero la componente l -esima del j -esimo autovettore. In breve,

$$[\mathbf{U}^\dagger \cdot \mathbf{U}]_{kj} = (\psi_k, \psi_j)_V = \delta_{kj}$$

In modo compatto, $\mathbf{U}^\dagger \cdot \mathbf{U} = I$. Quindi la matrice \mathbf{U} che diagonalizza un operatore Hermitiano rispetto ad una base ortonormale di autovettori soddisfa la condizione

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\dagger;$$

una tale matrice si dice *unitaria* (la corrispondente condizione nel caso reale è $O^{-1} = O^T$, e la matrice viene detta ortogonale).

► Non è detto che i λ_i siano tutti distinti, ma questo non importa.

► Posto

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j. \end{cases}$$

(IV.32) Definizione. Si dice *unitario* un operatore $U: V \rightarrow V$ dallo spazio euclideo complesso in sé, invertibile e tale che

$$U^{-1} = U^\dagger.$$

Gli operatori unitari godono della seguente proprietà caratteristica:

(IV.33) $U: V \rightarrow V$ è unitario se e solo se, $\forall x, y \in V$,

$$(15) \quad (U(y), U(x)) = (x, y),$$

cioè se conserva i prodotti scalari tra vettori (*e*, in particolare, le loro norme).

Dimostrazione. Da un lato, possiamo scrivere il membro sinistro della (15) come

$$(U(y), U(x)) = (U^\dagger(U(y)), x) = (\text{se } U^\dagger \cdot U = I) = (y, x).$$

D'altro canto, sia e_i una base ortonormale di V . Allora

$$U(e_k) = \sum_j \mathbf{u}_{kj} e_j,$$

Allora,

$$(U(e_k), U(e_l)) = \sum_j \sum_n \overline{\mathbf{u}_{kj}} \mathbf{u}_{ln} (e_j, e_n).$$

Ma la base è ortonormale, dunque $(e_j, e_n) = \delta_{jn}$. La somma doppia di quest'ultima equazione diventa una somma singola (per la proprietà del simbolo δ di Kronecker, e.g., su j , ovvero

$$(U(e_k), U(e_l)) = \sum_j \sum_n \overline{\mathbf{u}_{kj}} \mathbf{u}_{ln} \delta_{jn} = \sum_n \overbrace{\overline{\mathbf{u}_{kn}}}^{[\mathbf{u}^\dagger]_{nk}} \mathbf{u}_{ln} = \sum_n \mathbf{u}_{ln} \mathbf{u}_{nk}^\dagger = [\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger]_{lk}.$$

Dato che $(U(e_k), U(e_l)) = (e_k, e_l) = \delta_{kl} = \delta_{lk}$, ne segue che $[\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger]_{lk} = \delta_{lk}$. ■

Ritornando a considerare un operatore autoaggiunto H , possiamo sintetizzare le considerazioni fin qui fatte nel seguente

(IV.34) Teorema. Negli spazi euclidei di dimensione finita ogni operatore autoaggiunto si diagonalizza tramite un operatore unitario.

Nel caso dello spazio euclideo $V = E_3$, un operatore lineare ortogonale è dunque un operatore lineare che conserva gli angoli tra i vettori e le loro lunghezze. Dunque è un operatore che rappresenta una *rotazione rigida* attorno ad un asse. ▶

▶ In dimensione finita è unitario un operatore che, in una base ortonormale, viene rappresentato da una matrice unitaria.

▶ A meno di riflessioni.

Uno spazio euclideo notevole

In questa sezione finale studieremo in modo informale uno spazio euclideo complesso (in generale, specie nel caso infinito dimensionale, tali spazi si chiamano spazi di Hilbert) di notevole interesse in meccanica quantistica.

(IV.35) Definizione. Chiamiamo $'L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ lo spazio delle funzioni f , definite sull'asse reale a valori complessi, derivabili infinite volte, a quadrato integrabile, ovvero tali che valga

$$(16) \quad \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Lo spazio $'L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ è dotato di un prodotto scalare definito, come negli altri casi di spazi di funzioni su intervalli della retta reale, da

$$(17) \quad (f, g) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} g(x) dx.$$

Infatti, una applicazione, diretta ma non banale, della disuguaglianza di Cauchy-Schwartz mostra che,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \text{ e } \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx < \infty \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} g(x) dx < \infty,$$

ovvero che, date $f, g \in 'L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, allora (f, g) è ben definito; il fatto che sia un prodotto euclideo si mostra come nel caso di funzioni definite su intervalli. Osserviamo che ogni $f \in 'L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ si annulla all'infinito (cioè $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$); questo permette di rendersi conto che gli operatori $-i\hat{d}$, e dunque anche $-\partial_x^2 = (-i\hat{d})^2$ sono hermitiani su $'L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. In $'L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ consideriamo lo spazio \mathcal{F} delle funzioni della forma

$$f(x) = P(x)e^{(-\frac{x^2}{2})}, \text{ dove } P \text{ è un polinomio.}$$

Su \mathcal{F} definiamo l'operatore

$$(18) \quad \begin{aligned} \widehat{H} : \mathcal{F} &\longrightarrow \mathcal{F} \\ f(x) &\longmapsto (-\frac{1}{2}\partial_x^2 + \frac{1}{2}\widehat{x^2})(f(x)) = -\frac{1}{2}f''(x) + x^2 f(x). \end{aligned}$$

Vogliamo verificare che l'operatore \widehat{H} ammette, la sequenza di numeri

$$\lambda_n = (n + \frac{1}{2}), \quad n = 0, 1, \dots$$

come autovalori, e come corrispondenti autovettori funzioni f_n della forma

$$f_n = P_n(x)e^{(-\frac{x^2}{2})},$$

per polinomi P_n di grado n , univocamente definiti (a meno di una costante moltiplicativa, come è ovvio).

Per semplicità notazionale, consideriamo l'operatore \widehat{H} moltiplicato per 2, ovvero mostriamo che

$$\widehat{H}' := -\partial_x^2 + x^2$$

ha autovalori dati da $\lambda_n = 2n + 1$, $n = 0, 1, \dots$

Procediamo prima con esempi di grado basso, cominciando come ovvio con $n = 0$. Abbiamo, detta $\psi_0 := e^{(-\frac{x^2}{2})}$,

$$(19) \quad \frac{d\psi_0}{dx} = -x\psi_0, \quad \frac{d^2}{dx^2}\psi_0 = -\psi_0 + x\frac{d\psi_0}{dx} = -\psi_0 + x^2\psi_0$$

Dunque,

$$\widehat{H}'(\psi_0) = -(\partial_x^2 + x^2)(\psi_0) = -(-\psi_0 + x^2\psi_0) + \psi_0 = \psi_0.$$

Dunque, la affermazione è vera per $n = 0$. Consideriamo il caso $n = 1$, e $\psi_1 = (x + a)\psi_0$. Abbiamo, in questo caso,

$$\psi_1' = a\psi_0 - x(x + a)\psi_0, \Rightarrow \psi_1'' = (x^3 + ax^2 - 3x - a)\psi_0$$

Allora,

$$\widehat{H}'(\psi_1) = \left(-x^3 + ax^2 - 3x - a + x^2(x + a)\right)\psi_0 = (3x + a)\psi_0.$$

D'altro canto, $\lambda\psi_1 = (\lambda x + \lambda a)\psi_0$; dunque l'uguaglianza

$$\widehat{H}'\psi_1 = \lambda\psi_1$$

è vera se e solo se $\lambda = 3, a = 0$; vediamo che per $n = 1$ la affermazione è vera, con $\psi_1 = x\psi_0$.

Per n generico, si può procedere nel seguente modo:

Si osserva che

$$\frac{d^2}{f(x)}e^{(-\frac{x^2}{2})} = \left(f''(x) - 2x - f(x) + x^2f(x)\right)e^{(-\frac{x^2}{2})},$$

il che implica che

$$H(f(x)e^{(-\frac{x^2}{2})}) = \left(-f''(x) + 2x + f(x)\right)e^{(-\frac{x^2}{2})}.$$

e dunque l'equazione agli autovalori $\widehat{H}'\psi = \lambda\psi$ si scrive come

$$(20) \quad \left(-f''(x) + 2x + (1 - \lambda)f(x)\right)e^{(-\frac{x^2}{2})} = 0, \Leftrightarrow f''(x) + 2x + (1 - \lambda)f(x).$$

Ora, se $f(x) = P_n(x)$ è un polinomio di grado n , con coefficiente leading 1, ovvero

$$P_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} x^k, \text{ o } P_n = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad a_n = 1,$$

abbiamo che la (20) diviene:

$$(21) \quad - \sum_{k=2}^n (k(k-1)a_k)(x^{k-2}) + \left(\sum_{k=1}^n (2ka_k x^k) + \sum_{k=0}^n ((1-\lambda)a_k x^k) \right) = 0.$$

Quindi per risolvere il nostro problema basta verificare che questa equazione è risolubile nello spazio dei polinomi, ovvero dei coefficienti $\{a_0, \dots, a_{n-1}\}$.

Consideriamo il termine di ordine più elevato (ovvero n) in (21); il primo addendo non contribuisce; dunque si ha

$$(2n+1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_n = 2n+1.$$

Questa prima equazione determina $\lambda_n = 2n+1$, e dunque, per lo studio delle equazioni successive possiamo considerare la equazione

$$(22) \quad - \sum_{k=2}^n (k(k-1)a_k)(x^{k-2}) + \left(\sum_{k=1}^n (2ka_k x^k) + \sum_{k=0}^n ((-2n)a_k x^k) \right) = 0.$$

Per il termine di ordine $n-1$ di P_n si ha (anche qui il primo addendo non contribuisce):

$$2(n-1)a_{n-1} - 2na_{n-1} \equiv (-2)a_{n-1} = 0 \Leftrightarrow a_{n-1} = 0.$$

La equazione per a_{n-2} è (qui c'entra anche il primo addendo)

$$\begin{aligned} & - (n-2)(n-3) \overbrace{a_n}^{=1} + 2(n-2)a_{n-2} - 2na_{n-2} \\ & \equiv -(n-2)(n-3) - 2a_{n-2} = 0 \\ & \Leftrightarrow a_{n-2} = -\frac{1}{4}(n-2)(n-3) \end{aligned}$$

La equazione per a_{n-3} è

$$-(n-3)(n-4)a_{n-1} + 2(n-3)a_{n-3} - 2na_{n-3} \equiv -(n-3)(n-4)a_{n-1} - 6a_{n-3} = 0$$

Ma abbiamo visto che $a_{n-1} = 0$, e dunque anche $a_{n-3} = 0$.

In generale, guardando in faccia la (22) si osserva che, per i coefficienti a_i questa dà luogo ad equazioni ricorsive che determinano il termine a_{p-2} , noto il termine a_p ; infatti si ha, per $p = n-l, l = 2, \dots, n-1$

$$-(n-l-1)(n-l-2)a_{n-l} - 2la_{n-l-2} = 0$$

e, per l'ultimo termine ($p = 0 \Leftrightarrow l = n$), (qui il *secondo* addendo della (22) non contribuisce)

$$-2a_2 - 2na_0 = 0, \Leftrightarrow a_0 = -\frac{1}{n}a_2.$$

Questo conclude la dimostrazione.

(IV.36) Osservazione. → È evidente che $P_n(x)$ non è la funzione nulla; dato che

$$(\psi_n, \psi_n) = \int_{\mathbb{R}} P_n^2(x) e^{-x^2} dx$$

è un numero finito (l'integrando decade esponenzialmente), chiamiamolo c_n , se considero $\psi'_n = \frac{\psi_n}{\sqrt{c_n}}$ ho

► E.g., $c_0 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

i) $\widehat{H}\psi'_n = (n + \frac{1}{2})\psi'_n$

ii) $(\psi'_n, \psi'_n) = 1$ (gli autovettori “primati” hanno norma pari ad 1).

→ $(\psi_n, \psi_m) = 0$ se $n \neq m$ (Autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono “ortogonali!”); in particolare si ha anche che

$$(\psi'_n, \psi'_m) = 0 \text{ se } n \neq m,$$

ovvero i vettori $\{\psi'_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ formano una famiglia (o sistema) di vettori ortonormali in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

► In un senso opportuno, essi formano una *base* nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

→ I polinomi corrispondenti ai vettori ψ'_n , ovvero

$$P'_n \equiv \psi'_n e^{x^2} \equiv \frac{P_n}{\sqrt{c_n}}$$

si chiamano *Polinomi di Hermite*. Osserviamo che la relazione di ricorrenza

$$a_{k+2} = G(a_k), a_n = 1, \quad a_{n-1} = 0$$

implica che i polinomi di Hermite sono pari se n è pari e dispari se n è dispari. ■