1. Individuare le singolarità isolate della funzione

$$h(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}$$

e per ciascuna di esse dire se si tratta di singolarità eliminabile, polo o singolarità essenziale e calcolarne il residuo.

2. Classificare le singolarità della seguenti funzioni determinandone i relativi residui:

$$(i) \quad f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$$

$$(ii) \quad g(z) = \frac{\cos(1+z^2) - 1}{z^4 - 1}$$

$$(iii) \quad h(z) = \frac{(e^z - 1)^2}{z(1+z^2)}.$$

3. Calcolare

$$\int_\gamma \frac{dz}{2z^2 - 2iz - 1}$$

dove γ è la circonferenza di centro 2 e raggio 2 percorsa una volta in senso antiorario.

4. Calcolare

$$\int_\gamma \frac{e^{\frac{1}{z}}\, dz}{1+z^2}$$

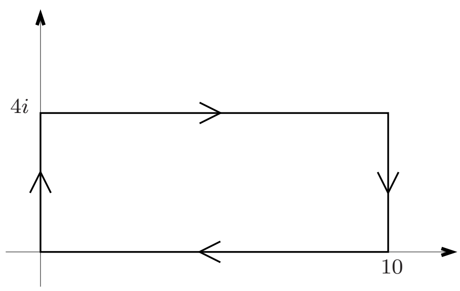
dove γ è la circonferenza di centro 0 e raggio 2 percorsa una volta in senso antiorario.

5. Calcolare

$$\int_C \frac{dz}{z^4 - 1}$$

dove C è la circonferenza di centro i e raggio $\frac{1}{2}$ percorsa una volta in senso antiorario.

6. Sia C il cammino rappresentato in figura. Calcolare:



$$(i) \quad \int_C \frac{dz}{z^2 - 3z + 5}$$

$$(ii) \quad \int_C \frac{dz}{z^2 + z + 1}$$

$$(iii) \quad \int_C \frac{dz}{z^2 - z + 1}$$

$$(iv) \quad \int_C \frac{z^2\, dz}{z^2 - 2(1+i)z + 2i}.$$

7. Usando il teorema dei residui, calcolare i seguenti integrali:

$$(i) \quad \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + \sin^2 t}$$

$$(ii) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$(iii) \quad \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1 + 8\cos^2\theta}.$$

8. (i) Descrivere le singolarità (calcolandone i residui) della funzione

$$f(z) = \frac{1 - e^{2\pi i z}}{z^4 - 1}$$

(ii) Calcolare[1]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi x)}{x^4 - 1}\, dx.$$

[1]**Suggerimento:** si osservi che $\sin^2(\pi x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(1 - e^{2\pi i x})$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.