

1. Dire in quali $z \in \mathbb{C}$ ciascuna delle seguenti funzioni è derivabile in senso complesso:

(i) $f(z) = \overline{z^2 + 5z}$

(ii) $g(z) = e^z + e^{\bar{z}}$

(iii) $h(z) = z\sqrt{e^{|z|^2} - 1}$.

2. Verificare che la funzione

$$f(z) = \begin{cases} \frac{e^z - 1}{z}, & \text{se } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{se } z = 0, \end{cases}$$

soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann in $z = 0$. Dire se f è olomorfa in \mathbb{C} .

3. Sia

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2xy.$$

- i) Verificare che u è armonica su \mathbb{R}^2 .
- ii) Trovare una funzione armonica coniugata v .
- iii) Verificare che la funzione $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ è un polinomio complesso. Calcolare f' e f'' .

4. Sia

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x, y) = x^2 - y^2 - x.$$

- i) Verificare che u è armonica su \mathbb{R}^2 .
- ii) Trovare una funzione armonica coniugata v .
- iii) Verificare che la funzione $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ è un polinomio complesso.

5. Sia

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x, y) = e^{2x}(2 \cos^2 y - 1).$$

- i) Verificare che u è armonica su \mathbb{R}^2 .
- ii) Trovare una funzione armonica coniugata v .
- iii) Scrivere una formula in $z = x + iy$ che descriva la funzione olomorfa

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$