

1. Stabilire quali delle seguenti successioni sono convergenti, divergenti o oscillanti:

$$(i) \quad \frac{i^n}{n}$$

$$(ii) \quad \frac{(-1)^n n}{n+i}$$

$$(iii) \quad \frac{n^2 + in}{n^2 + i}.$$

2. Scrivere ciascuna delle seguenti funzioni come somma di una serie di potenze di centro 0, specificando su quale insieme tale serie converge alla funzione data:

$$(i) \quad f_1(z) = \frac{1}{2z+5}$$

$$(ii) \quad f_2(z) = \frac{1}{1+z^4}$$

$$(iii) \quad f_3(z) = \frac{1+iz}{1-iz}$$

$$(iv) \quad f_4(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}.$$

3. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze e discutere per ciascuna di esse il comportamento della serie sul bordo del disco di convergenza:

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$$

$$(ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$$

$$(iii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$$

$$(iv) \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^n$$

$$(v) \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$$

$$(vi) \quad \sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n$$

$$(vii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n.$$

4. Disegnare l'immagine tramite  $f(z) = e^z$  degli insiemi seguenti:

$$(i) \quad A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 1 \text{ e } 0 \leq \operatorname{Im} z \leq \pi\}$$

$$(ii) \quad B = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Im} z \leq \pi\}.$$

5. Dire in quali  $z \in \mathbb{C}$  la funzione  $f(z) = \frac{z}{1+|z|}$  è derivabile.