Capitolo 11

Numeri complessi

11.1 Introduzione

I numeri complessi nacquero nel XVI secolo, quando lo studio delle equazioni di terzo e quarto grado condusse i matematici del tempo (Cardano e Tartaglia) a scrivere formule risolutive in cui compariva la radice quadrata di -1. Tale quantità non era ben compresa ed era utilizzata con disagio, tanto da essere chiamata da Cartesio unità immaginaria. Successivamente, i lavori di D'Alembert e di Gauss (che dimostrò che ogni polinomio di grado n ammette n radici nel campo complesso) chiarirono il significato e l'importanza dei numeri complessi. Attualmente i numeri complessi sono organicamente integrati nella matematica moderna e ne costituiscono uno degli elementi basilari.

11.2 Il campo complesso

Definizione 11.2.1 *Definiamo numero complesso z una coppia ordinata di numeri reali (a, b). Poniamo quindi*

$$z = (a, b), \qquad \text{ove } a,\ b \in \mathbb{R}.$$

Denotiamo con $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi.

Per motivi che appariranno chiari in seguito, il primo elemento a si chiama parte reale di z e il secondo elemento b si chiama parte immaginaria di z. Ovviamente due numeri complessi $z_1 = (a_1, b_1)$ e $z_2 = (a_2, b_2)$ sono eguali se e solo se $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$.

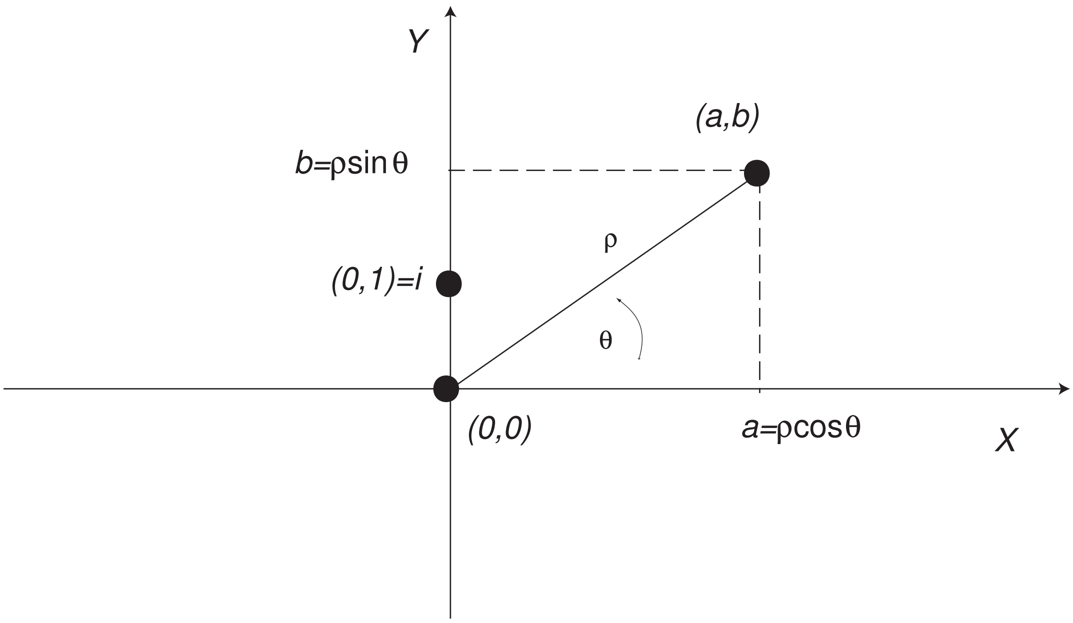
Definiamo ora la somma e il prodotto di due numeri complessi.

Definizione 11.2.2 *Siano $z_1 = (a_1, b_1)$ e $z_2 = (a_2, b_2)$ due numeri complessi. Poniamo*

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \tag{11.2.3}$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \tag{11.2.4}$$

Le precedenti eguaglianze sono definitorie, cioè i termini di destra in (11.2.3) e (11.2.4) definiscono i rispettivi termini di sinistra. Le somme e i prodotti che appaiono a destra in tali formule sono ordinarie somme e prodotti tra numeri reali.



Il piano complesso

Ci accingiamo ora a dimostrare che $\mathbb{C}$, dotato delle due operazioni appena definite, è un campo, cioè soddisfa alle condizioni 1–10 del paragrafo 1.5 sui numeri reali. A tal fine consideriamo il numero complesso $(0,0)$ e il numero complesso $(1,0)$. In forza di (11.2.3) e (11.2.4) si ha facilmente, per ogni $z = (a,b)$,

$$(a,b) + (0,0) = (0,0) + (a,b) = z,$$
$$(a,b)(1,0) = (1,0)(a,b) = z.$$

Quindi $(0,0)$ funge da elemento neutro rispetto alla somma e $(1,0)$ funge da elemento neutro rispetto al prodotto.

Sia ora $z = (a,b)$ un numero complesso. Poniamo

$$-z = (-a,-b)$$

e, se $z \neq 0$, poniamo

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right).$$

Sempre in forza di (11.2.3) e (11.2.4) si verifica immediatamente che

$$
\begin{aligned}
z + (-z) = (-z) + z &= (0,0), \\
z\frac{1}{z} = \frac{1}{z}z &= (1,0).
\end{aligned}
$$

Quindi $-z$ è l'opposto di z e $\frac{1}{z}$ il reciproco di z.

Teorema 11.2.5 $\mathbb{C}$ *dotato della somma e del prodotto appena definiti è un campo numerico, cioè verifica le proprietà da 1 a 9 del paragrafo 1.5.*

Dimostrazione. La dimostrazione di questo Teorema è semplice ed è lasciata per esercizio. Essa discende dalla diretta applicazione delle definizioni di somma e prodotto in $\mathbb{C}$, delle proprietà di campo per le operazioni in $\mathbb{R}$ e dalle considerazioni precedenti. ■

Osservazione. Dal punto di vista insiemistico, l'insieme $\mathbb{C}$ coincide con $\mathbb{R}^2$. Pertanto i numeri complessi si possono rappresentare come punti del piano cartesiano. Qualora si adotti questa rappresentazione, il piano viene chiamato piano di Argand-Gauss, o, semplicemente, piano complesso. Esso è dotato delle due operazioni sopra descritte. La somma di due numeri complessi coincide con la somma di vettori in $\mathbb{R}^2$, ma il prodotto di numeri complessi differisce dalle altre operazioni definite nello spazio euclideo bidimensionale. In altri termini, il campo complesso è una struttura algebrica distinta da quella di spazio euclideo introdotta in $\mathbb{R}^2$.

11.3 Il sottocampo dei numeri reali

Consideriamo nel piano complesso l'insieme $\mathbb{R}\times\{0\}$ degli elementi $(a,0)$, aventi parte immaginaria nulla. Tale insieme coincide con l'asse delle ascisse, ed è quindi in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$. La somma e il prodotto di tali elementi, così pure come il reciproco e l'opposto, sono ancora della stessa forma. Infatti, se $z_1 = (a_1, 0)$ e $z_2 = (a_2, 0)$, si ha

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, 0), \tag{11.3.1}$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2, 0). \tag{11.3.2}$$

Se $z = (a,0)$, si ha ovviamente $-z = (-a,0)$ ed è facile verificare che, se $a \neq 0$, si ha anche $\frac{1}{z} = (\frac{1}{a}, 0)$. Ne segue che la restrizione delle operazioni (11.3.1) e (11.3.2) a $\mathbb{R}\times\{0\}$ rende tale insieme un sottocampo di $\mathbb{C}$.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\{0\}$ l'applicazione biunivoca definita da

$$f(a) = (a,0), \qquad a \in \mathbb{R}.$$

In virtù di (11.3.1) e (11.3.2), si ha

$$
\begin{aligned}
f(a_1) + f(a_2) &= f(a_1 + a_2), \\
f(a_1)f(a_2) &= f(a_1 a_2).
\end{aligned}
$$

In tali formule, l'addizione e il prodotto a primo membro sono in $\mathbb{C}$, mentre quelle a secondo membro sono in $\mathbb{R}$. In altri termini, f è una corrispondenza biunivoca che preserva le operazioni di campo. Ogni operazione algebrica in $\mathbb{R}\times\{0\}$ si può effettuare nel seguente modo: si opera sulle controimmagini in $\mathbb{R}$ e poi, mediante f, si calcola l'immagine del risultato in $\mathbb{R}\times\{0\}$. Ciò che si ottiene è esattamente quello che si otterrebbe operando direttamente in $\mathbb{R}\times\{0\}$.

Una applicazione biunivoca che preserva le operazioni definite su una struttura algebrica si chiama isomorfismo algebrico. I due campi $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}\times\{0\}$ sono quindi isomorfi e si possono identificare a tutti gli effetti. Di fatto, d'ora innanzi identificheremo il campo reale con il sottocampo $\mathbb{R}\times\{0\}$ e considereremo $\mathbb{R}$ come un sottocampo di $\mathbb{C}$.

11.4 Forma algebrica dei numeri complessi

Sia $z = (a, b)$ un numero complesso. In forza delle definizioni di somma e prodotto tra numeri complessi, si ha l'identità

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0). \tag{11.4.1}$$

Indicheremo sempre il numero $(0, 1)$ con la lettera i. Grazie dell'identificazione di $\mathbb{R}\times\{0\}$ con $\mathbb{R}$, converremo di indicare i numeri del tipo $(a, 0)$ semplicemente con a. Quindi (11.4.1) diviene

$$z = a + ib. \tag{11.4.2}$$

La scrittura (11.4.2) viene chiamata forma algebrica del numero complesso z. Il numero $a + i(-b)$ verrà anche scritto come $a - ib$.

Il numero $i = (0, 1)$ viene chiamato unità immaginaria. Si ha, per la definizione di prodotto,

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1. \tag{11.4.3}$$

Per le parti reale e immaginaria di z si usa la notazione

$$a = \mathrm{Re}\ z, \quad b = \mathrm{Im}\ z.$$

I numeri del tipo ib (con $b \neq 0$) si chiamano immaginari puri. L'asse delle ordinate nel piano complesso, cioè l'insieme degli immaginari puri, viene chiamato asse immaginario, mentre l'asse delle ascisse assume il nome di asse reale.

A differenza dei numeri reali, i numeri dell'asse immaginario non formano un sottocampo di $\mathbb{C}$, come mostra il fatto che $i^2 = -1$ non è immaginario puro.

Per calcolare somme e prodotti di numeri complessi in forma algebrica si possono usare le ordinarie regole del calcolo letterale e la formula (11.4.3). Se $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$, si ha

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

e anche

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1). \end{aligned}$$

Definizione 11.4.4 *Sia $z = a + ib$. Si chiama coniugato di z, e viene indicato con $\overline{z}$, il numero complesso con la stessa parte reale ma parte immaginaria opposta, cioé*

$$\overline{z} = a - ib.$$

Si noti che il coniugato del coniugato di z è z stesso. Inoltre $z = \overline{z}$ se e solo se $b = 0$, cioè z è reale.

Definizione 11.4.5 *Sia $z = a + ib$. Si chiama modulo di z, e viene indicato con $|z|$, il numero reale non negativo*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Si noti che il modulo di z è la lunghezza del segmento che nel piano complesso congiunge l'origine con z. Se z è reale, cioè $z = a$, con $a \in \mathbb{R}$, il modulo di z coincide con il valore assoluto di a.

Si hanno le seguenti proprietà di immediata verifica.

1 $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}z$

2 $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}z$

3 $z\overline{z} = |z|^2$

4 se $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z}z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

5 $|\mathrm{Re}\ z| \leq |z|, \quad |\mathrm{Im}\ z| \leq |z|$

6 $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

7 $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

Teorema 11.4.6 *Si ha*

a) $\forall z \qquad |z| = 0$ *se e solo se* $z = 0$*;*

b) $\forall z_1, z_2 \qquad |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$*;*

c) $\forall z_1, z_2 \qquad |z_{1+} z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Dimostrazione. La prima proprietà è immediata. Per dimostrare b) si ponga $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$. Si ha

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1),$$

da cui

$$
\begin{aligned}
|z_1 z_2| &= \sqrt{(a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2} \\
&= \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2} \\
&= |z_1|\,|z_2|.
\end{aligned}
$$

Per dimostrare c) si utilizzano alcune delle precedenti proprietà 1–7. Si ha

$$
\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}).
\end{aligned}
$$

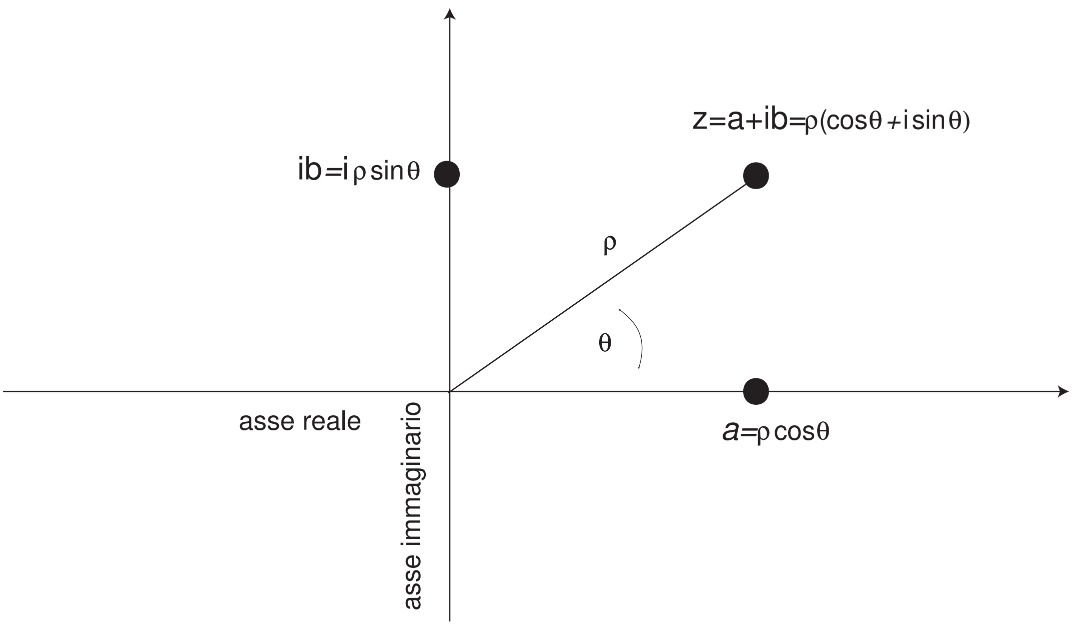
Poiché $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \leq |\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})| \leq |z_1|\,|z_2|$, si ottiene

$$
|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|\,|z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2,
$$

ovvero c). ■

Si noti che da b) si ricava che, se $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$. Infatti si ha $1 = \left|z\frac{1}{z}\right| = |z|\left|\frac{1}{z}\right|$.

Osservazione. $\mathbb{C}$ non può essere ordinato in modo che il campo complesso sia un campo ordinato, nel senso definito nel paragrafo 1.5 del capitolo sui numeri reali. Infatti, per assurdo, sia $<$ una relazione d'ordine verificante le proprietà 1 e 2 del Teorema 1.35 e le proprietà 11 e 12 del paragrafo 1.5. Se $i > 0$, allora si ha $-1 = i^2 > 0$ e quindi, moltiplicando ancora per i, si ha anche $-i > 0$. Di conseguenza anche $i + (-i)$ deve essere positivo, il che è assurdo. Un analogo ragionamento mostra che non può essere $i < 0$.



Forma algebrica e trigonometrica

11.5 Forma trigonometrica dei numeri complessi

Sia $z \in \mathbb{C}$ e supponiamo $z \neq 0$. Indichiamo con ρ il suo modulo che, per il punto a) del Teorema 11.4.6, è non nullo. Nel piano complesso orientiamo il segmento di estremi $(0,0)$ e z dall'origine a z. Indichiamo con θ uno qualsiasi degli angoli di cui l'asse delle ascisse deve ruotare per sovrapporsi in direzione e verso con il suddetto segmento. Il numero θ viene chiamato argomento di z ed è definito a meno di multipli interi relativi di 2π. Infatti, se θ è un argomento di z, anche $\theta + 2k\pi$, con k intero relativo, è un argomento di z.

Sia $z = a + ib$ un numero complesso non nullo in forma algebrica. Si ha

$$a = \rho \cos\theta,$$
$$b = \rho \sin\theta.$$

Da queste eguaglianze si ottiene

$$z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta). \tag{11.5.1}$$

L'espressione (11.5.1) viene chiamata forma trigonometrica del numero complesso z. Si noti che se $z \in \mathbb{C}$ ha la forma trigonometrica (11.5.1), allora la forma trigonometrica del suo coniugato sarà

$$\overline{z} = \rho(\cos\theta - i\sin\theta) = \rho(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)).$$

Assegnato $z = a + ib$ non nullo, la sua forma trigonometrica si ottiene calcolando dapprima $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$. L'argomento sarà allora individuato dalle formule
$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Esempi 11.5.2

1. Sia $z = 1+i$. Si ha $\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Quindi $\cos\theta = 1/\sqrt{2}$ e $\sin\theta = 1/\sqrt{2}$. A meno di multipli interi relativi di 2π si ha $\theta = \pi/4$. Quindi
$$1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}).$$
2. Sia $z = a$ reale. Se $a > 0$, si ha $\rho = a$, da cui $\cos\theta = 1$ e $\sin\theta = 0$. A meno di multipli interi relativi di 2π si ha $\theta = 0$. Quindi
$$a = a(\cos 0 + i\sin 0).$$
Se $a < 0$, si ha $\rho = -a$, da cui $\cos\theta = -1$ e $\sin\theta = 0$. A meno di multipli interi relativi di 2π si ha $\theta = \pi$. Quindi
$$a = -a(\cos\pi + i\sin\pi).$$
3. Sia $z = ib$ immaginario puro, con $b > 0$. Si ha $\rho = b$, da cui $\cos\theta = 0$ e $\sin\theta = 1$. A meno di multipli interi relativi di 2π si ha $\theta = \pi/2$. Quindi
$$ib = b(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}).$$
Se $z = ib$, con $b < 0$, si ha $\rho = -b$ e, a meno di multipli interi relativi di 2π, $\theta = -\pi/2$. Quindi $ib = -b(\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2))$.
4. Sia $z = 1 + i\sqrt{3}$. In questo caso $\rho = \sqrt{1+3} = 2$, da cui $\cos\theta = 1/2$ e $\sin\theta = \sqrt{3}/2$. Ne segue, $\theta = \pi/3$ a meno di multipli interi relativi di 2π. Quindi
$$1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}).$$

Osservazione. Siano $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ due numeri complessi in forma trigonometrica. In forza della definizione di modulo e argomento, si ha che $z_1 = z_2$ se e solo se $\rho_1 = \rho_2$ ed esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$. Questa osservazione tornerà utile nella dimostrazione del successivo Teorema 11.6.3.

La forma trigonometrica dei numeri complessi permette di eseguire i prodotti e i quozienti in modo agevole, come mostra il seguente Teorema.

Teorema 11.5.3 *Siano z_1 e z_2 due numeri complessi non nulli. Se*

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad e \quad z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

allora

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right), \tag{11.5.4}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right). \tag{11.5.5}$$

Dimostrazione. Si ha, eseguendo i prodotti,

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\big((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1)\big).$$

Poiché $\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 = \cos(\theta_1+\theta_2)$ e $\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1 = \sin(\theta_1+\theta_2)$, si ha immediatamente (11.5.4).

Per ottenere (11.5.5), si ricordi che, come visto al punto 4 del paragrafo precendente,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_2} = \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} &= \frac{\rho_2(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{\rho_2^2} \\ &= \frac{1}{\rho_2}(\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)). \end{aligned}$$

Quindi (11.5.5) segue da (11.5.4). ■

Il modulo del prodotto (quoziente) è quindi il prodotto (quoziente) dei moduli e l'argomento è la somma (differenza) degli argomenti (a meno di multipli interi relativi di 2π).

Le potenze ad esponente intero di un numero complesso vengono definite nel modo usuale.

Sia z un numero complesso non nullo. Poniamo, per ogni $n \in \mathbb{Z}$,

$$z^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ volte}} & \text{se } n > 0 \\ 1/\underbrace{z \cdot 1/z \cdot \dots \cdot 1/z}_{-n \text{ volte}} & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

Le potenze così definite godono ovviamente delle consuete proprietà delle potenze.

Teorema 11.5.6 (Formula di De Moivre) *Sia z un numero complesso non nullo avente la forma trigonometrica*

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Per ogni intero relativo n si ha

$$z^n = \rho^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right). \tag{11.5.7}$$

Dimostrazione. Questo Teorema è in realtà un corollario del Teorema 11.5.3. Se $n = 0$, l'espressione in (11.5.7) vale 1, mentre, se $n > 0$, l'espressione (11.5.7) si ottiene applicando n volte la (11.5.4).

Se $n < 0$, si ponga $m = -n > 0$. Poiché

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}(\cos\theta - i\sin\theta)) = \frac{1}{\rho}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)),$$

si ottiene

$$z^n = \left(\frac{1}{z}\right)^m = \left(\frac{1}{\rho}\right)^m (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))^m.$$

Quindi,

$$\begin{aligned} z^n &= \frac{1}{\rho^m}(\cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta)) \\ &= \rho^n \left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right). \end{aligned}$$

■

Un numero complesso, oltre che in forma algebrica e trigonometrica, può essere espresso in forma esponenziale. Per definire tale forma, sia $e = 2,718\ldots$ la base dei logaritmi naturali. Questo numero viene definito con precisione nel capitolo sulle successioni. Consideriamo un qualunque numero complesso di modulo 1. In forma trigonometrica esso si scrive come $\cos\theta + i\sin\theta$, ove θ è il suo argomento.

Poniamo

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \tag{11.5.8}$$

Tale eguaglianza ha per ora significato puramente formale. La scrittura $e^{i\theta}$ si può considerare come una abbreviazione dell'espressione $\cos\theta + i\sin\theta$. Si noti che la notazione esponenziale in (11.5.8) soddisfa le proprietà delle potenze. Infatti

$$\begin{aligned} e^{i0} &= e^0 = 1, \\ e^{i(-\theta)} &= \cos\theta - i\sin\theta = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Inoltre

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

Per la formula di De Moivre si ha pure

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}.$$

Dalle formule

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

si ricava
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \tag{11.5.9}$$
Le formule (11.5.9) sono chiamate formule di Eulero.

Per motivi di chiarezza tipografica, si usa anche la notazione $\exp(i\theta)$ al posto di $e^{i\theta}$.

Sia ora $z \neq 0$ un numero complesso in forma trigonometrica (11.5.1). Da (11.5.8) si ricava
$$z = \rho e^{i\theta} = \rho\exp(i\theta). \tag{11.5.10}$$
L'espressione (11.5.10) si chiama forma esponenziale del numero complesso z.

11.6 Radici nel campo complesso

Nel campo reale un numero positivo ammette due oppure una radice n–esima, a seconda che n sia pari o dispari. Un numero negativo ammette una o nessuna radice n–esima, a seconda che n sia dispari o pari. Questa dissimmetria nell'esistenza delle radici non si presenta nel campo complesso, ove ogni numero $z \neq 0$ ammette esattamente n radici n–esime distinte.

Definizione 11.6.1 *Sia z un numero complesso. Sia n un intero positivo. Un numero complesso w si dice radice n–esima di z se*
$$w^n = z. \tag{11.6.2}$$
Si noti che, se z è reale, ogni radice di z nel campo reale è anche una radice di z nel campo complesso.

Teorema 11.6.3 *Sia $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ un numero complesso non nullo e sia n un intero positivo. Allora, esistono n radici n–esime distinte di z. Esse hanno l'espressione*
$$\rho^{1/n}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{11.6.4}$$

Dimostrazione. Sia $w = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ un qualsiasi numero complesso non nullo scritto in forma trigonometrica. Si ha
$$w^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi).$$
Quindi l'eguaglianza (11.6.2) è verificata se e solo se $r^n = \rho$, ossia $r = \rho^{1/n}$, e se $n\phi = \theta + 2k\pi$, ove $k \in \mathbb{Z}$. Ne segue che tutte e sole le soluzioni di (11.6.2) hanno la forma
$$w_k = \rho^{1/n}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \tag{11.6.5}$$
al variare di k in $\mathbb{Z}$.

Dimostriamo ora che in realtà l'espressione (11.6.5) dà luogo esattamente a n valori distinti.

Innanzi tutto, se k e h sono due interi distinti, tali che $0 \leq h < k \leq n-1$, si ha che $w_k \neq w_h$. Infatti le due radici possono coincidere se e solo se esiste un intero relativo ℓ tale che

$$\frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta + 2h\pi}{n} + 2\ell\pi, \tag{11.6.6}$$

ovvero $k - h = n\ell$. Ciò è assurdo, dato che $0 < k - h \leq n - 1$. Quindi le radici w_k sono distinte tra loro se $0 \leq k \leq n-1$.

Sia ora w_h una radice tale che $h > n-1$ o $h < 0$. In questo caso esiste un intero k, con $0 < k \leq n-1$ tale che $k - h$ è un multiplo intero di n. Esiste quindi $\ell \in \mathbb{Z}$ tale che $k - h = n\ell$. Ne segue la (11.6.6) e quindi $w_h = w_k$. ■

Se z è reale, tra le n radici (11.6.4) si ritroveranno anche le (eventuali) radici reali.

Se $z = 0$, allora $w = 0$ è l'unica radice n–esima di 0. In un senso che sarà precisato allo studente nel corso dei suoi studi futuri, questa radice si conta n–volte. A tale convenzione si giunge osservando che, quando il numero complesso z si avvicina indefinitamente a 0, le sue radici n-esime si avvicinano tutte indefinitamente a 0.

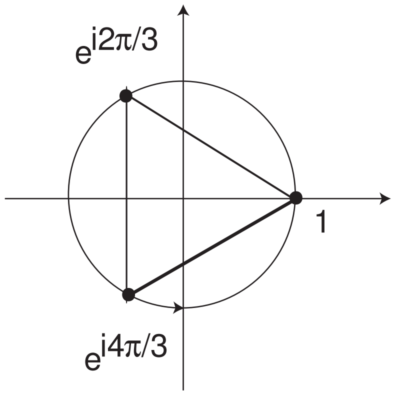
Usando la notazione esponenziale, le radici complesse si possono esprimere nella forma

$$\rho^{1/n}\exp\left(i\,\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Osservazione. Sia $z \neq 0$ un generico numero complesso. È facile rappresentare nel piano complesso le sue radici n–esime. Esse sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nel cerchio di raggio $\rho^{1/n}$ centrato nell'origine. Infatti le radici n–esime hanno tutte modulo $\rho^{1/n}$ e quindi si collocano sulla circonferenza avente tale raggio e centrata nell'origine. Inoltre, la differenza degli argomenti di due radici consecutive w_k e w_{k+1} è costante e vale $\dfrac{2\pi}{n}$. Quindi l'angolo al centro del poligono i cui lati si ottengono congiungendo radici consecutive è costante. Perciò il poligono è regolare.

Esempi 11.6.7

1. Sia $z = 1$. In questo caso $\rho = 1$ e $\theta = 0$. Calcoliamone le radici per alcuni valori di n. Se $n = 2$ l'espressione (11.6.4) fornisce le due radici $\cos 0 + i \sin 0 = 1$, e $\cos\pi + i\sin\pi = -1$. In questo caso ci sono solo le radici reali.

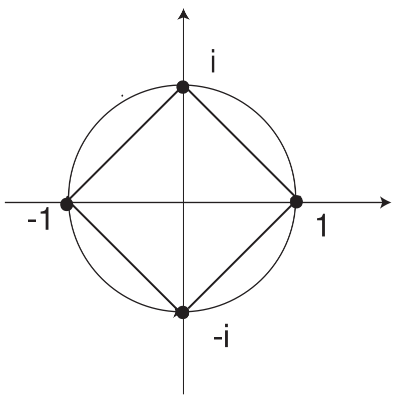


Le radici cubiche di 1

Se $n = 3$, si ottengono le radici

$$\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3} = e^{i2k\pi/3}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

Si ha quindi $w_0 = 1$, $w_1 = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, $w_2 = -1/2 - i\sqrt{3}/2$.

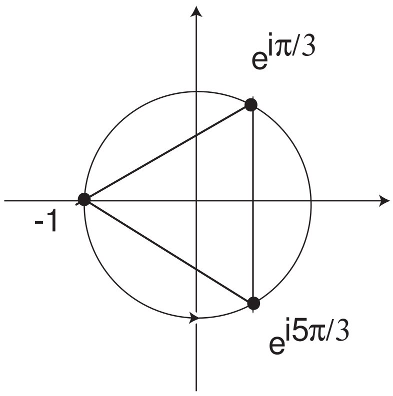


Le radici quarte di 1

Sia ora $n = 4$. Le radici quarte sono date dall'espressione

$$\cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4} = e^{i2k\pi/4}, \qquad k = 0, \ldots, 3.$$

Si ha quindi $w_0 = 1$, $w_1 = i$, $w_2 = -1$, $w_3 = -i$.



Le radici cubiche di -1

2. Sia ora $z = -1$ e $n = 2$. In questo caso si ha $\rho = 1$ e $\theta = \pi$. Le radici quadrate sono $\cos \pi/2 + i \sin \pi/2 = i$ e $\cos 3\pi/2 + i \sin 3\pi/2 = -i$.

   Se $n = 3$ le radici cubiche hanno la forma

   $$\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} = e^{i(2k+1)\pi/3}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

   Otteniamo $w_0 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$, $w_1 = -1$, $w_2 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$.

3. Sia $z = i$ e calcoliamone le radici quadrate. Si ha $\rho = 1$ e $\theta = \pi/2$. L'espressione (11.6.4) diviene

   $$\cos \frac{\pi/2 + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\pi/2 + 2k\pi}{2}, \qquad k = 0, 1.$$

   Si ha $w_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$, $w_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$.

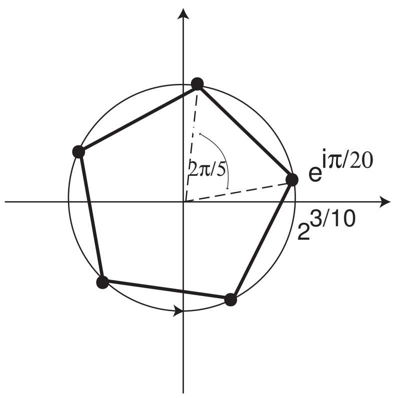
4. Sia $z = 2 + i2$ e sia $n = 5$. In forma trigonometrica si ha

   $$z = 2^{3/2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}).$$

Le sue radici quinte sono quindi

$$z = 2^{3/10}\left(\cos(\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5})+i\sin(\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5})\right),\quad k=0,1,2,3,4.$$

Le radici si dispongono quindi su una circonferenza di raggio $2^{3/10}$. Ciascuna di esse è ruotata di $2\pi/5$ rispetto alla precedente e il primo vertice ha argomento $\pi/20$.



Le radici quinte di $z = 2 + i2$