Analisi Matematica I - Tema b
20 febbraio 2003

1. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{(\cosh x - \cos x)\tan x}$$

2. Stabilire per quali valori di a e b la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a\arctan\frac{1}{x} + b & \text{per} \quad x < 0 \\ \sin 2x & \text{per} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

risulta :
(i) continua nell'origine
(ii) derivabile nell'origine.

3. Scrivere lo sviluppo di McLaurin arrestato al secondo ordine (derivate prima e seconda) con resto di Peano di

$$f(x) = e^{e^{-x}}$$

4. Calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^4 x dx$$

5. Stabilire, giustificando la risposta se esiste finito l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \sin\frac{1}{x} dx$$

6. Stabilire, giustificando la risposta se esiste finito l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x-1)\sqrt[3]{x-4}} \quad dx$$

7. Sia F la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt[3]{(t+3)^2}} \quad dt$$

Determinarne: A) Campo di esistenza B)limiti agli estremi del campo di esistenza, asintoti C) segno, derivata, eventuali punti di non derivabilitá, crescita, decrescita eventuali estremi locali D) Tracciarne sommariamente il grafico.

Soluzioni - Tema b

1)

$$\frac{\arctan x - \sin x}{\cosh x - \cos x)\tan x} \sim \frac{(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)) - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))}{[(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))]x} \to -\frac{1}{6}$$

2) continua quando $b = -\frac{\pi}{2}a$ derivabile per $b = -\pi$, $a = -2$

3) $f(x) = e - ex + ex^2 + o(x^2)$

4)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x(1 - \cos^2 x)\sin x dx = -(\frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{35}$$

5) Sono da esaminare l'origine e ∞. All'infinito la funzione integranda é $\sim x^{-\frac{4}{3}}$ e quindi integrabile. Nell'origine si ha convergenza assoluta dato che $|\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\sin\frac{1}{x}| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ che é integrabile. L'integrale improprio é dunque convergente.

6) Si devono esaminare l'origine, i punti 1 e 4 e $+\infty$. Nel punto 1 la funzione integranda é continua, nell'origine é asintotica ad una costante per $\log x$ mentre in 4 é asintotica ad una costante per $(x-4)^{-1/3}$ tutte integrabili impropriamente. Ad ∞ l'integranda é asintotica a $x^{-4/3}\log x$ dunque l'integrale improprio esiste finito.

7) C.E. $\mathbf{R}$. Infatti in $x = -3$ l'integranda é asintotica a $e^3(x+3)^{-2/3}$ e quindi integrabile impropriamente.
$\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$ nessun asintoto obliquo
$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt[3]{(t+3)^2}} \quad dt = \alpha > 0$ quindi $y = \alpha$ asintoto orizzontale a $+\infty$
Per ogni $x \neq -3$ si ha $F'(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}$ di segno positivo per ogni x. F é crescente su $\mathbf{R}$.
In $x = -3$, vi é un punto a tangente verticale. F é positiva per $x > 0$.

grafico