0.1 **Analisi Matematica I**

1 **31 Gennaio 2003** **TEMA**

1

1) Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left[\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\arctan\frac{1}{x}\right]$$

2) Sia

$$f(x)=\begin{cases}\sin x+b & \text{se } x>0\\ \log(1+ax) & \text{se } x\le 0\end{cases}$$

i) Per quali valori dei parametri a e b la funzione f è continua in $x=0$?

ii) Per quali valori dei parametri a e b la funzione f è derivabile in $x=0$?

3) Sia $f(x)=\log(1+\cos x)$. Scriverne lo sviluppo di McLaurin arrestato al secondo ordine (derivate prima a seconda) con resto di Peano.

4) Sia

$$f(x)=\begin{cases}\arctan\left(\dfrac{1}{x(x-1)}\right) & \text{se } x\neq 0 \text{ e } x\neq 1\\ 0 & \text{se } x=0 \text{ e } x=1\end{cases}$$

Verificare che f non è continua nei punti $x=0$ e $x=1$. Riconoscere il tipo di discontinuità.

5) Calcolare la seguente primitiva, indicando brevemente il procedimento seguito

$$\int \frac{\log^2 x}{x^2}dx$$

6) Discutere l 'esistenza del seguente integrale generalizzato, motivando le risposte

$$\int_0^{+\infty} \frac{x - \log(1+x)}{x^{7/3}} dx$$

7) Sia F la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x \frac{\log|t|}{t^2 - 1} dt$$

Determinarne: A) campo di esistenza B) limiti agli estremi del campo di esistenza e eventuali asintoti C) segno D) derivabilità E) crescita e punti estremanti F) Tracciarne sommariamente il grafico.

SOLUZIONI

1) $f(x) = x^2(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(x^{-2}) - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + o(x^{-3})) \to -\frac{1}{2}$, per $x \to +\infty$

2) Continua per a qualunque e $b = 0$; derivabile per $a = 1$ e $b = 0$.

3) $f(x) = \log 2 - \frac{x^2}{4} + o(x^2)$

4) $\lim_{x\to 0-} f(x) = \pi/2$; $\lim_{0+} f(x) = -\pi/2$ $\lim_{1-} f(x) = -\pi/2$ $\lim_{1+} f(x) = \pi/2$.

Ambedue discontinuità di prima specie

5) Per parti, due volte.

$$\int \frac{\log^2 x}{x^2} dx = -\frac{\log^2 x}{x} + 2\int \frac{\log x}{x^2} dx =$$

$$-\frac{\log^2 x}{x} - 2\frac{\log x}{x} + 2\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\log^2 x}{x} - 2\frac{\log x}{x} - \frac{2}{x} + C$$

6) Punto singolare: $x = 0$. Per $x \to 0$, $f(x) \sim \dfrac{1}{2}x^{-1/3}$. Per $x \to +\infty$, $f(x) \sim x^{-4/3}$.L'integrale esiste.

7) A) CE$=(-\infty, +\infty)$ (poichè l 'integranda é integrabile in $x = -1$, e $x = 1$) B) La funzione integranda è intregrabile nell 'intorno di $-\infty$ e di $+\infty$, quindi ha asintoti orizzontali C) F è dispari, positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$ e nulla nell 'origine D) F è derivabile in ogni punto eccetto l 'origine, in cui ha un punto a tangente verticale E) F è sempre crescente F) Grafico approssimativo.