Analisi Matematica I. 20 giugno 2002

1) Determinare i valori del parametro reale a per cui esiste l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^{1-a}(1-x)^a} dx$$

2) Sia

$$f(x) = \begin{cases} \cos x - a & \text{se } x \geq 0 \\ b \sin x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

A) Per quali valori dei parametri reali a e b la funzione f è continua in $x = 0$? B) Per quali valori dei parametri reali a e b la funzione f è derivabile in $x = 0$?

3) Calcolare

$$\int_0^1 \arctan(\sqrt{x+2}) dx$$

4) Sia $f(x) = \log(1 + \sinh(x))$. Scriverne lo sviluppo di McLaurin arrestato al secondo ordine (derivate prima a seconda) con resto di Peano.

5) Verificare se la seguente serie è convergente, giustificando la risposta.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^5}{(n!)^2}$$

6) Calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} n \left(\exp \left(\frac{2n + (-1)^n}{n^2 - 1} \right) - 1 \right)$$

7) Sia F la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{t^6 + 3t^4 + 2t^2 + 1} dt$$

determinarne: A) insieme di definizione B) segno C) asintoti D) crescere e decrescere. E) Tracciarne sommariamente il grafico.

Risposte. Tema del 20/6/02

1) $-1 < a < 1$

2) A) $a = 1, b$ qualsiasi B) $a = 1, b = 0$

3) $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} - 3\arctan\sqrt{2} + \sqrt{2}$

4) $f(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$

5) Detto a_n il termine generale della serie, si ha $a_{n+1}/a_n = \dfrac{3(n+1)^5}{n^5(n+1)^2} \to 0$ per $n \to +\infty$. Per il criterio del rapporto la serie converge.

6) $a_n \sim n\dfrac{2n+(-1)^n}{n^2-1} \to 2.$

7) A) Insieme di Definizone : $(-\infty, +\infty)$ B) $F(0) = 0$, $F(x) > 0$ per ogni altro valore di x C) Poichè la funzione integranda è integrabile all'infinito e F è pari,, posto$I = \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^6+3t^4+2t^2+1}$, si ha,

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = I$$

D) F decescente per $x < 0$, crescente per $x > 0$. Minimo in $x = 0$.

E) Grafico