

Esercizio 1. La funzione $y = f(x)$ é crescente in $[1, 4]$ e decrescente su $(-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$. Determinare dove la funzione $-2f - 2$ é decrescente.

Soluzione. Le ipotesi significano $f'(x) \geq 0$ se $x \in [1, 4]$, $f'(x) \leq 0$ se $x \notin [1, 4]$. Sia $g = -2f - 2$. Si ha $g'(x) = -2f'(x)$, quindi $g'(x) \geq 0$ su $(-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$, $g'(x) \leq 0$ su $[1, 4]$. Pertanto g è crescente su $(-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$.

Esercizio 2. La funzione $y = f(x)$ é crescente in $[0, 4]$ e decrescente su $(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$. Determinare dove la funzione $2f - 2$ é crescente.

Soluzione. Le ipotesi significano $f'(x) \geq 0$ se $x \in [0, 4]$, $f'(x) \leq 0$ se $x \notin [0, 4]$. Sia $g = 2f - 2$. Si ha $g'(x) = 2f'(x)$, quindi $g'(x) \geq 0$ su $[0, 4]$, $g'(x) \leq 0$ su $(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$. Pertanto g è crescente su $[0, 4]$.

Esercizio 3. La funzione $y = f(x)$ é crescente in $(-\infty, 0)$, decrescente su $(0, +\infty)$ e soddisfa $f(0) = 1$. Determinare dove la funzione $f(x^2)$ é crescente.

Soluzione. Sia $g(x) = f(x^2)$. Quindi, $g = f \circ h$, ove $h(x) = x^2$. Applicando la regola della catena alla funzione composta g , abbiamo

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(h(x)) \cdot h'(x) \\ &= f'(x^2) \cdot 2x. \end{aligned}$$

Per le ipotesi, abbiamo $f'(x^2) \leq 0$ per ogni x (dato che $x^2 \geq 0$ per ogni x). Quindi si ha $g'(x) \geq 0$ se $x \leq 0$. Pertanto g è crescente su $(-\infty, 0)$ (l'informazione $f(0) = 1$ è irrilevante per il problema).

Esercizio 4. La funzione $y = f(x)$ é crescente in $(-\infty, 0)$, decrescente su $(0, +\infty)$ e soddisfa $f(0) = 1$. Determinare dove la funzione $f(x^3)$ é crescente.

Soluzione. Sia $g(x) = f(x^3)$. Quindi, $g = f \circ h$, ove $h(x) = x^3$. Applicando la regola della catena alla funzione composta g , abbiamo

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(h(x)) \cdot h'(x) \\ &= f'(x^3) \cdot 3x^2. \end{aligned}$$

Abbiamo $3x^2 \geq 0$ per ogni x . Quindi si ha $g'(x) \geq 0$ se $f'(x^3) \geq 0$. Pertanto g è crescente su $(-\infty, 0)$ (di nuovo, l'informazione $f(0) = 1$ è irrilevante per il problema).

Esercizio 5. La funzione $y = f(x)$ é crescente in $(-\infty, +\infty)$ e soddisfa $f(-3) = 1$. Determinare dove la funzione $f e^{-f}$ é crescente.

Soluzione. Sia $g(x) = f(x)e^{-f(x)}$. Quindi, $g = f \cdot h$, dove $h = e^{-f}$. Applicando la regola di Leiniz e quella della catena, otteniamo

$$\begin{aligned} g' &= f' h + f h' \\ &= f' e^{-f} + f (-f' e^{-f}) \\ &= f' e^{-f} (1 - f). \end{aligned}$$

Per ipotesi si ha $f'(x) \geq 0$, e senz'altro $e^{-f(x)} > 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre, $1 - f(x) > 0$ se $x < -3$. Pertanto $g'(x) \geq 0$ su $(-\infty, -3)$, $g'(x) \leq 0$ su $(-3, +\infty)$. g è crescente su $(-\infty, -3)$.

Esercizio 6. La funzione $y = f(x)$ è crescente in $(-\infty, +\infty)$ e soddisfa $f(4) = \frac{1}{2}$. Determinare dove la funzione $f - f^2$ è crescente.

Soluzione. Sia $g(x) = f(x) - f(x)^2$. Quindi,

$$\begin{aligned} g' &= f' - 2f'f \\ &= f'(1 - 2f). \end{aligned}$$

Si ha $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre, $1 - 2f(x) > 0$ se $x < 4$. Pertanto $g'(x) \geq 0$ su $(-\infty, 4)$, cioè g è crescente su $(-\infty, 4)$.

Esercizio 7. La funzione $y = f(x)$ è crescente in $(-\infty, +\infty)$ e negativa su $(-\infty, -1)$, nulla in -1 , positiva su $(-1, +\infty)$. Determinare dove la funzione $2f^2 - 1$ è crescente.

Soluzione. Sia $h(x) = f(x)^2$. Quindi, $h = k \circ f$, essendo $k(t) = t^2$. Pertanto, $k'(t) = 2t$. Allora $g = 2h - 1$ e per la linearità e la regola della catena

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2h'(x) \\ &= 2k'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= 2(2f(x)) \cdot f'(x) \\ &= 4f(x) \cdot f'(x). \end{aligned}$$

Si ha $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Pertanto $g'(x) \geq 0$ su $(-1, \infty)$, cioè g è crescente su $(-1, \infty)$; invece $g'(x) \leq 0$ su $(-\infty, -1)$, cioè g è crescente su $(-\infty, -1)$.