Compitino di algebra lineare e geometria del 5 Febbraio 2008

VERSIONE A

Nome e cognome: Capitan Mutanda

Numero di Matricola: Immaginario Puro

Attenzione: riportare i dati personali su ogni foglio consegnato

Esercizio 1. Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$, aventi dimensione m e n rispettivamente, e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ basi di V e W.

- Definire la matrice di un'applicazione lineare $f : V \to W$ rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$.
- Si dimostri che la corrispondenza appena descritta definisce un isomorfismo tra $\mathcal{L}(V, W) = \mathrm{Hom}(V, W)$ e lo spazio delle matrici $?_1 \times ?_2$ (specificare).
- Dare la definizione di autovalore e autovettore di $g \in \mathrm{End}(V)$ e spiegare cosa significa che $g \in \mathrm{End}(V)$ è diagonalizzabile.
- Dimostrare che $g \in \mathrm{End}(V)$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a g nella base $\mathcal{B}$ è simile a una matrice diagonale.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$, di dimensione finita d.

- Si dia la definizione di prodotto scalare su V, di spazio nullo di un prodotto scalare φ (denotato $V^{\perp_\varphi}$), di prodotto scalare non degenere.
- Se $\varphi = \langle\, , \rangle$ è un prodotto scalare su V, si dimostri che φ induce un'applicazione lineare $L : V \to V^*$ e che φ è non degenere se e solo se L è un isomorfismo.
- Se $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale, si definiscano l'annullatore $W^0 \subseteq V^*$ (anche denotato $\mathrm{perp}_{V^*}(W)$) e il complemento ortogonale di W rispetto a φ, $W^{\perp_\varphi}$.
- Si dimostri che se φ è non degenere allora L induce un isomorfismo tra $W^{\perp_\varphi}$ e W^0.

Esercizio 3.

1. Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ con $\dim\ker(f) = 2$ e autovalore 2 con molteplicità geometrica due; f è necessariamente diagonalizzabile? Dimostrare o confutare con controesempio.

2. Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^5)$ con polinomio caratteristico $p_f(X) = (X-1)^3(X-3)^2$. Quali sono gli autovalori di f e le loro possibili molteplicità geometriche?

3. Rispondere alla stessa domanda sapendo in aggiunta che $f = L_A : X \mapsto AX$ con $A = A^t$.

4. Dare un esempio esplicito per ogni possibilità elencata in 2 (ora senza l'ipotesi di simmetria).

Soluzione. 1.: Autospazi relativi ad autovalori distinti sono sempre in somma diretta. Quindi, se $V_0 = \ker(f)$ e $V_2 = \ker(f - 2\mathrm{id})$ sono gli autospazi degli autovalori 0 e 2 rispettivamente, abbiamo

$$\dim(V_0 + V_2) = \dim(V_0 \oplus V_2) = \dim\ker(f) + 2 = 4,$$

pertanto $V_0 \oplus V_2 = \mathbb{R}^4$. Ne segue che f è diagonalizzabile, dato che l'unione di una base di V_0 e di una base di V_2 fornisce una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di f.

2.: Gli autovalori di f sono le radici del polinomio caratteristico p_f, quindi $\mathrm{spec}(f) = \{1, 3\}$; le rispettive molteplicità algebriche sono le molteplicità in quanto radici del polinomio caratteristico, ovvero $a_1 = 3$, $a_3 = 2$. D'altra parte, la molteplicità geometrica di ogni autovalore è la dimensione dei corrispondente autospazio, quindi nel nostro caso: $g_1 = \dim\ker(f - \mathrm{id})$, $g_3 = \dim\ker(f - 3\,\mathrm{id})$. In generale, la molteplicità geometrica di un autovalore $\lambda \in \mathrm{spec}(f)$ di un endomorfismo lineare dato $f \in \mathrm{End}(V)$ soddisfa $1 \leq g_\lambda \leq a_\lambda$, e ogni possibilità intermedia può verificarsi. Quindi, le possibili molteplicità geometriche sono $g_1 = 1, 2, 3$ e $g_3 = 1, 2$.

3. Sia $f = L_A$ con $A = A^t$; allora, dato che $A = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$, f è rappresentato da una matrice simmetrica rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^5$. Dal momento che quest'ultima è ortonormale per il prodotto scalare standard, f è un operatore simmetrico (o autoaggiunto) per il prodotto scalare standard stesso. Quindi il teorema spettrale implica, in particolare, che f è diagonalizzabile (ovvero, esiste una base di $\mathbb{R}^5$ costituita da autovettori di f; di fatto, nel caso in esame, la base di autovettori può essere scelta ortonormale, ma questo è inessenziale per l'esercizio). Di conseguenza, la molteplicità geometrica di ogni autovalore di f deve essere uguale alla rispettiva molteplicità algebrica. Pertanto, $g_1 = 3$ e $g_3 = 2$ in questo caso.

4. Tornando al caso generale, abbiamo in tutto $3 \cdot 2 = 6$ possibilità. Eccole di seguito:

1. $g_1 = 3$, $g_3 = 2$ (caso diagonalizzabile): $f = L_A$, con
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. $g_1 = 3$, $g_3 = 1$: $f = L_A$, con
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. $g_1 = 2$, $g_3 = 2$: $f = L_A$, con
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. $g_1 = 2$, $g_3 = 1$: $f = L_A$, con
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. $g_1 = 1$, $g_3 = 2$: $f = L_A$, con
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. $g_1 = 1$, $g_3 = 1$: $f = L_A$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nota bene: Questi sono alcuni esempi possibili, *non* gli unici possibili.

Esercizio 4. Sia

$$W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

1. Trovare la dimensione di W e equazioni Cartesiane per W.
2. Trovare una base ortonormale di W per il prodotto scalare standard.
3. Trovare una base per l'annullatore $W^0 \subseteq (\mathbb{R}^4)^*$ (anche denotato $\operatorname{perp}_{(\mathbb{R}^4)^*}(W)$).
4. Trovare una base ortonormale per il complemento ortogonale $W^\perp \subseteq \mathbb{R}^4$ di W rispetto al prodotto scalare standard.

Soluzione: 1.: Mediante operazioni elementari per righe, otteniamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 2 & 3 & c \\ -1 & 1 & 3 & d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b \\ 2 & 1 & 0 & a \\ 1 & 2 & 3 & c \\ -1 & 1 & 3 & d \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & -2 & a-2b \\ 0 & 1 & 2 & -b+c \\ 0 & 2 & 4 & b+d \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & -2 & a-2b \\ 0 & 0 & 0 & a-3b+c \\ 0 & 0 & 0 & 2a-3b+d \end{array}\right).$$

Quindi, $\dim(W) = 2$ e equazioni Cartesiane per W sono

$$a - 3b + c = 0,\ 2a - 3b + d = 0.$$

Dato che i gradini, nella riduzione a scala della matrice avente per colonne i generatori di W, compaiono in corrispondenza della prima e della seconda colonna, una base $\mathcal{B}$ di W si ottiene prendendo il primo e il secondo generatore, che chiameremo v_1 e v_2 rispettivamente:

$$\mathcal{B} = \Big(v_1, v_2\Big) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Abbiamo, denotando con $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare standard:

$$\langle v_1, v_1 \rangle = 7,\ \langle v_1, v_2 \rangle = 4,\ \langle v_2, v_2 \rangle = 7.$$

Se poniamo $v_2' =: v_2 - \lambda\, v_1$, avremo

$$\langle v_1, v_2' \rangle = 4 - 7\,\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{7}.$$

Pertanto, una base *ortogonale* di W è $\widetilde{B} = (w_1, w_2)$, ove $w_1 = v_1$ e

$$\begin{aligned} w_2 = v_2 - \frac{4}{7}\, v_1 \quad &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} \\ \frac{10}{7} \\ \frac{11}{7} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Come verifica, abbiamo

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \frac{1}{7}\big(-2 + 3 + 10 - 11\big) = 0.$$

Per ottenere una base *ortonormale* di W basta allora dividere i w_i per le rispettive norme, date da

$$\|w_1\| = \sqrt{7},\ \|w_2\| = \frac{1}{7}\sqrt{1 + 9 + 100 + 121} = \frac{\sqrt{231}}{7}.$$

Otteniamo così la base ortonormale

$$\widehat{B} = \left(\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{7}} \\ \frac{1}{\sqrt{7}} \\ \frac{1}{\sqrt{7}} \\ -\frac{1}{\sqrt{7}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{231}} \\ \frac{3}{\sqrt{231}} \\ \frac{10}{\sqrt{231}} \\ \frac{11}{\sqrt{231}} \end{pmatrix} \right).$$

3.: Una base per l'annullatore W^0 si ottiene direttamente dalle equazioni Cartesiane:

$$\mathcal{D} = \Big(e_1^* - 3e_2^* + e_3^*, 2e_1^* - 3e_2^* + e_4^*\Big).$$

4. Dato che la base canonica è ortonormale per il prodotto scalare standard, l'isomorfismo $L : \mathbb{R}^4 \to (\mathbb{R}^4)^*$ indotto da quest'ultimo soddisfa $L(e_i) = e_i^*$. Pertanto, dato che $W^\perp = L^{-1}(W^0)$, abbiamo

$$\begin{aligned}
W^\perp &= \operatorname{span}\left\{L^{-1}\big(e_1^* - 3e_2^* + e_3^*\big), L^{-1}\big(2e_1^* - 3e_2^* + e_4^*\big)\right\} \\
&= \operatorname{span}\left\{e_1 - 3e_2 + e_3, 2e_1 - 3e_2 + e_4\right\} \\
&= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.
\end{aligned}$$

Diciamo r_1, r_2 questi generatori. Abbiamo

$$\langle r_1, r_1\rangle = 11,\ \langle r_1, r_2\rangle = 11,\ \langle r_2, r_2\rangle = 14.$$

Una base ortogonale di $W^\perp$ è allora $\mathcal{D} = (r_1, r_2')$, ove

$$\begin{aligned}
r_2' &= r_2 - \frac{\langle r_1, r_2\rangle}{\langle r_1, r_1\rangle} r_1 = r_2 - r_1 \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ora $\|r_1\| = \sqrt{11}$, $\|r_2'\| = \sqrt{3}$ e quindi una base ortonormale di W è data da

$$\widehat{\mathcal{D}} =: \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} \\ -\frac{3}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\right).$$

Capitan Mutanda ha colpito ancora!