

## Algebra lineare

24 giugno 1999

Si svolgano i seguenti esercizi.

1. Si consideri la matrice a elementi reali

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k & k \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- a) Si calcoli al variare del parametro reale  $k$  il rango di  $A$ .  
b) Si consideri l'applicazione lineare  $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  definita da

$$\underline{x} \mapsto A\underline{x},$$

e si calcoli  $\ker(f)$ .

2. Sia  $V$  lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3.

- a) Si consideri l'insieme  $U$  formato dagli elementi di  $V$  che ammettono le radici 0 e 1. Si provi che  $U$  è un sottospazio di  $V$  e se ne calcoli la dimensione.  
b) Sia  $W$  il sottospazio di  $V$  generato dai polinomi  $x - 1$  e  $x^2 - 1$ . Si determinino  $U \cap W$  e  $U + W$ .

3. Si consideri la matrice a elementi reali

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- a) Si determinino in funzione di  $\lambda$  autovalori e autospazi di  $A$ .  
b) Si dica per quali valori di  $\lambda$   $A$  è diagonalizzabile, e per tali valori si scriva una matrice  $B$  diagonale simile a  $A$ .  
c) Si determini il polinomio minimo di  $A$ .