Algebra lineare

19 aprile 2000

Si svolgano i seguenti esercizi.

1. Si consideri la matrice a elementi reali

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & k+1 & 1 \\ k & 1 & k+1 & k \\ k & 0 & k & k \end{bmatrix}.$$

a) Si calcoli al variare del parametro reale k il rango di A.

b) Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\underline{x} \mapsto A\underline{x}.$$

Si dica per quali valori di k il vettore $(k^2, -2k^2, k)$ appartiene all'immagine $F(\mathbb{R}^4)$ e per tali valori si calcoli $\ker(F)$.

2. Sia V lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3.

a) Si consideri l'insieme U formato dagli elementi di V che ammettono la radice 2 con molteplicità maggiore o uguale a 2. Si provi che U è un sottospazio di V e se ne calcoli la dimensione.

b) Sia W il sottospazio di V generato dai polinomi $x - 4$ e $x^2 - 4$. Si determinino $U \cap W$ e $U + W$.

3. Si consideri la matrice a elementi reali

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

a) Si determinino in funzione di λ autovalori e autospazi di A.

b) Si dica per quali valori di λ A è diagonalizzabile, e per tali valori si scriva una matrice B diagonale simile a A.

c) Si determini il polinomio minimo di A.