Algebra lineare

16 febbraio 1999

Si svolgano i seguenti esercizi.

1. Si consideri la matrice a elementi reali

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & k & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 & k \end{bmatrix}.$$

a) Si determini il rango di B al variare di $k \in \mathbb{R}$.

b) Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$\underline{x} \mapsto B\underline{x}.$$

Si dica per quali valori di k il vettore $[1, 0, 0, 2]$ appartiene all'immagine $F(\mathbb{R}^4)$.

2. Sia V lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 4.

a) Si consideri l'insieme U formato dagli elementi di V che ammettono la radice 3 con molteplicità maggiore o uguale a 2. Si provi che U è un sottospazio di V e se ne calcoli la dimensione.

b) Si verifichi che l'insieme $W = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio di V e si calcoli $U \cap W$.

3. Si consideri la matrice ad elementi reali

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Si determinino autovalori e autospazi di A.

b) Si dica se A è diagonalizzabile.

c) Si determini il polinomio minimo di A.