Algebra lineare

10 novembre 1999

Si svolgano i seguenti esercizi.

1. Si consideri la matrice a elementi reali

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k^2 \\ -k & -k^2+k & -k & -k^2+k \\ 1 & k-1 & 1 & k \end{bmatrix}.$$

a) Si calcoli al variare del parametro reale k il rango di A.
b) Si discuta al variare del parametro reale k la risolubilità del sistema

$$A\underline{x} = \begin{bmatrix} k^2+1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Si considerino nello spazio $V = \mathbb{R}^4$ i vettori

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 &= (1,1,1,1) \\ \underline{v}_2 &= (1,3,2,0) \\ \underline{v}_3 &= (0,-1,1,4) \\ \underline{v}_4 &= (5,1,0,3) \end{aligned}$$

a) Si provi che $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ è una base di V.
b) Si determinino le coordinate dei vettori canonici $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$, $\underline{e}_4$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

3. Siano U e W i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ generati rispettivamente dai vettori

$$\{(1,1,0,-1), \quad (1,2,1,0), \quad (2,3,2,-1)\}$$

e

$$\{(2,1,0,2), \quad (2,3,2,4), \quad (0,1,1,1)\}.$$

Si determinino una base e la dimensione di $U+W$ e $U \cap W$.

4. Si consideri la matrice a elementi reali

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ -11 & 3 & 0 & -16 \\ -23 & 4 & 1 & -32 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Si determinino autovalori e autospazi di A.
b) Si dica se A è diagonalizzabile.