Algebra lineare

10 luglio 2000

Si svolgano i seguenti esercizi.

1. a) Si dica per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ esiste una applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$F\left(\begin{bmatrix}1\\0\\k\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\\2k^2\\-1\end{bmatrix} \qquad F\left(\begin{bmatrix}0\\1\\k\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\\2k\\0\end{bmatrix} \qquad F\left(\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1\\k-1\\3k-1\\1\end{bmatrix}$$

b) Per tali valori di k si calcoli $\dim(\mathrm{Im}(F))$.

2. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 a elementi in $\mathbb{R}$. Fissata $A \in V$ si consideri l'applicazione $F_A : V \to V$ che ad ogni $M \in V$ associa AM (prodotto righe per colonne).

a) Si dimostri che F_A è lineare.

b) Si considerino i seguenti sottospazi di V: $U = \left\{ A \in V \,|\, \ker(F_A) = \langle \begin{bmatrix}2 & -4\\-1 & 2\end{bmatrix} \rangle \right\}$; $W = \langle \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 1\end{bmatrix} \rangle$. Si determinino le dimensioni di $U \cap W$ e $U + W$.

3. Si consideri la matrice a elementi reali

$$A = \begin{bmatrix}3 & 1 & k+1 & k^2+k\\0 & 2 & 0 & 0\\0 & k & 3 & k\\0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

a) Si determinino in funzione di k autovalori e autospazi di A.

b) Si dica se esistono valori di k per cui A è diagonalizzabile.

c) Si determini al variare di k il polinomio minimo di A.