Leggi di conservazione nella dinamica dei gas e nei flussi di traffico

Francesca Marcellini

February 2, 2010

In questa tesi di dottorato sono trattate leggi di conservazione, equazioni alle derivate parziali del primo ordine di tipo iperbolico, loro teoria e loro applicazioni. In particolare si considerano sistemi di leggi di conservazione applicati all'ambito della dinamica dei gas e dei flussi di traffico stradale, con tecniche presenti in [1], sviluppate ed adattate ai vari problemi presi in considerazione.

Il primo risultato é contenuto in [2], ed é rivolto alla descrizione analitica di un fluido con sezione che varia. Quando la sezione $a = a(x)$ varia con continuità. Un classico modello è descritto dal *p-system*, un sistema 2×2 di leggi di conservazione, dato da

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x q = -\dfrac{q}{a}\,\partial_x a \\[2ex] \partial_t q + \partial_x \left(\dfrac{q^2}{\rho} + p(\rho)\right) = -\dfrac{q^2}{a\rho}\,\partial_x a \end{cases}$$

$t \in \Re^+$	tempo
$x \in \Re$	spazio
$\rho = \rho(t,x)$	densitá del fluido
$q = q(t,x)$	densitá della quantitá di moto
$a = a(x)$	sezione del tubo
$p = p(\rho)$	pressione.

Qui, il termine di sorgente esprime proprio la variazione della sezione del tubo, la cui regolaritá fornisce un' adeguata definizione di soluzioni deboli, vedi [2, Definition 2.5].

Come mezzo per lo studio del sistema (1), consideriamo il problema matematico relativo ad un *giunto*, cioé il caso in cui la geometria del tubo presenti una brusca *discontinuitá*, in corrispondenza, ad esempio, di $x = 0$. Piú precisamente supponiamo di avere una sezione $a(x) = a^-$ per $x < 0$ e $a(x) = a^+$ per $x > 0$. Quindi consideriamo separatamente in ciascun tubo il seguente modello

$$(2) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x q = 0 \\[2ex] \partial_t q + \partial_x \left(\dfrac{q^2}{\rho} + p(\rho)\right) = 0 \end{cases}$$

con una *condizione di raccordo* in corrispondenza della discontinuitá in $x = 0$,

$$(3) \quad \Psi\left(a^-, (\rho, q)(t, 0-); a^+, (\rho, q)(t, 0+)\right) = 0,$$

che imponga requisiti fisici, come ad esempio la conservazione della massa e l'uguaglianza della pressione idrostatica $p(\rho)$, o la conservazione parziale della quantitá di moto.

Con questa definizione, proviamo la *buona posizione* del modello sopra desritto, cioé costruiamo un semigruppo L^1 Lipschitz le cui orbite siano soluzioni del corrispondente problema di Cauchy. Tale risultato viene quindi esteso ad un tubo con sezione costante a tratti e, grazie ad un *bound* sulla variazione totale della sezione, proviamo la *buona posizione* anche per il modello corrispondente ad un tubo con sezione a di classe $W^{1,1}$. Piú precisamente, attraverso un procedimento rigoroso di limite, proviamo che il problema di Cauchy corrispondente al sistema (1) genera un semigruppo Lipschitz, sotto le ipotesi di variazione totale limitata del dato iniziale e della sezione del tubo di fluido.

Si ottiene inoltre una stima esplicita di un *bound* sulla variazione totale della sezione del tubo del fluido, che mostra come, a velocitá piú basse di fluido, siano consentiti valori piú elevati per la variazione totale della sezione del fluido. Al contrario un esempio esplicito, calcolato nel caso di pressione isotermica, mostra che vicino alla velocitá sonica e con una sezione con elevata variazione totale, potrebbe crescere in modo arbitrario la variazione totale della soluzione, vedi [2, paragraph 2.2].

In [3] l'evoluzione di un gas in un tubo con sezione che varia viene esteso al sistema di Eulero completo, cioè ad un sistema dato da 3 leggi di conservazione

$$(4) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x q = 0 \\ \partial_t q + \partial_x \left(\dfrac{q^2}{\rho} + p(\rho, e) \right) = 0 \\ \partial_t E + \partial_x \left(\dfrac{q}{\rho} \left(E + p(\rho, e) \right) \right) = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{rl} \rho{=}\rho(t,x) & \text{densità di fluido} \\ q{=}q(t,x) & \text{quantità di moto} \\ e{=}e(t,x) & \text{densità di energia interna} \\ p{=}p(\rho,e) & \text{pressione} \\ E{=}\frac{1}{2}\frac{q^2}{\rho}{+}\rho e & \text{densità di energia totale.} \end{array}$$

Anche in tal caso, esempi espliciti mostrano la necessità di un *bound* sulla variazione totale del tubo di gas.

In [4] si dimostra la buona posizione del problema di Cauchy per un sistema $n \times n$ strettamente iperbolico di leggi di conservazione con sorgente illimitata (in L^∞). Più precisamente si considera

$$(5) \qquad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = g(x, u) \\ u(0, x) = u_o(x) \end{cases} \qquad \begin{array}{r} t \in \Re^+ \\ x \in \Re \\ u \in \Re^n \\ u_o \in \mathrm{Ł}^1 \cap BV(\Re; \Re^n) \end{array}$$

con ciascun *campo caratteristico* genuinamente nonlineare o linearmente degenere, vedi [1, Definition 5.2].

Sotto l'ipotesi di *non risonanza* $|\lambda_i(u)| \geq c > 0$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ e per ogni u e l'ipotesi di limitatezza

$$(6) \qquad |g(x, \cdot)|_{\mathbf{C}^2} \leq M(x) \text{ con } M \in L^1(\Re; \Re),$$

si prova esistenza ed unicità di soluzioni globali entropiche, sotto le usuali ipotesi di variazione totale limitata del dato iniziale e di norma L^1 di $\|g(x, \cdot)\|_{\mathbf{C}^1}$ sufficientemente piccola; in letteratura un tale risultato è stato provato sotto un'ipotesi più forte in (6), cioè $M \in (L^\infty(\Re;\Re) \cap L^1(\Re;\Re))$. Questo risultato viene inoltre applicato ad un fluido in un tubo con sezione discontinua, mostrando esistenza, unicità e regolarità del semigruppo trovato.

Questa tesi di dottorato tratta anche di leggi di conservazione applicate ai flussi di traffico. In [5] viene introdotto un nuovo modello macroscopico a due fasi per il traffico stradale, basato su un sistema 2×2 di leggi di conservazione *non regolare*. Consideriamo il classico modello *LWR*

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x (\rho V) = 0 \\ V = w\,\psi(\rho) \end{array} \right. \qquad \begin{array}{ll} \rho{=}\rho(t,x) & \text{densità di traffico} \\ V{=}V(w,\rho) & \text{velocità di traffico} \\ w{>}0 & \text{massima velocità di traffico.} \end{array}$$

Qui la funzione Ψ descrive l'attitudine dei guidatori a scegliere la loro velocità in dipendenza della densità di traffico in corrispondenza dalla loro posizione. Inizialmente assumiamo che ciascun guidatore abbia la propria velocità massima; quindi w diventa una quantità trasportata dal traffico. Come seconda ipotesi assumiamo che esista una velocità $V_{\max}$ per tutti i guidatori. Quindi otteniamo il seguente modello

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x (\rho\, v(\rho,w)) = 0 \\ \partial_t w + v(\rho,w)\, \partial_x w = 0 \end{array} \right. \qquad \text{con} \qquad v(\rho,w) = \min\left\{V_{\max}, w\,\psi(\rho)\right\},$$

che può essere scritto come un sistema 2×2 di leggi di conservazione con flusso $C^{0,1}$:

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x (\rho\, v(\rho,w)) = 0 \\ \partial_t (\rho\, w) + \partial_x (\rho\, w\, v(\rho,w)) = 0 \end{array} \right. \qquad \text{con} \qquad v(\rho,w) = \min\left\{V_{\max}, w\,\psi(\rho)\right\}.$$

Si studia il *Problema di Riemann* per tale sistema e si mostra una connessione tra questo modello ed altri descritti in letteratura (modelli macroscopici, cinetici e microscopici). Inoltre si prova *rigorosamente* che tale modello macroscopico può essere derivato da un modello microscopico detto *Follow the Leader*, basato su un sistema di equazioni differenziali ordinarie.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bressan A.,

Hyperbolic systems of conservation laws,

Oxford lecture series in mathematics and its applications. Oxford University Press,

20,

(2000)

[2] Colombo R.M. e Marcellini F.,

Smooth and discontinuous junctions in the p−system,

Journal of Mathematical Analysis and Applications,

361,
(2010),
440–456

[3] Colombo R.M. e Marcellini F.,
Coupling conditions for the 3/*times*3 *Euler system*,
Preprint,
(2009)

[4] Colombo R.M., Marcellini F. e Rascle M.,
A $2-$*phase traffic model based on a speed bound*,
Preprint,
(2009)

[5] Guerra G., Marcellini F. e Schleper V.,
Balance laws with integrable unbounded sources,
SIAM Journal of Mathematical Analysis,
41,
(2009),
1164–1189

Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Cozzi 53, 20125 Milano.
f.marcellini@campus.unimib.it
Dottorato in Matematica Pura ed Applicata, con sede presso l'Università degli Studi di Milano-Bicocca, XXII Ciclo.
Direttore di ricerca: Prof. Rinaldo M. Colombo, Università degli Studi di Brescia.