Geometria e topologia della scelta sociale

Davide L. Ferrario

5 settembre 2005

Capitò che quella sera piovosa i nove membri del club "Cinema Brianza" si trovarono a decidere non su uno, non su due, ma addirittura su tre film d'autore in proiezione quella stessa giornata. Non era mai successo agli amanti dei sottotitoli: contemporaneamente *The long goodbye (Il lungo addio)* di Robert Altman, *Det sjunde inseglet (Il settimo sigillo)* di Ingmar Bergman e *Marie-Chantal contre le docteur Kha (Marie Chantal contro il dr. Kha)* di Claude Chabrol. Dal momento che non sembrava esserci una posizione comune ed unanime, si decise di mettere la decisione ai voti. I tre candidati vennero chiamati in breve A,B e C e per alzata di mano si contarono 2 voti per A, 4 voti per B e 3 voti per C. A maggioranza era stato scelto B, ma i 5 che non l'avevano votato fecero presente che avrebbero visto tutto fuorché un'altra volta un film di Bergman, e chiesero di mettere ai voti se accettare o meno l'esito della votazione: naturalmente vinsero con 5 voti contro 4 e B fu bocciato. I nove cinefili si trovarono daccapo in una sera piovosa senza ancora un programma condiviso per la serata.

Il dottor P., che stava rimuginando sulla dinamica dell'accaduto, propose la seguente soluzione: dal momento che nella prima votazione risultava chiaro che A era ultimo per gradimento, bastava eliminarlo tra i candidati e procedere con un ballottaggio tra B e C. Con nove votanti il pareggio era impossibile, per cui avrebbero determinato la scelta comune. Così si fece, e stavolta C risultò vincitore per 5 voti contro 4. I nove affiliati vestirono i loro lunghi impermeabili e attraversarono la città per raggiungere la sala dove stavano per proiettare C. Mentre la pioggia cadeva incessante e monotona, il dottor P. osservò la malavoglia con cui ci si trascinava per le vie e pensò di chiedere "Scusate, ma quanti di voi vogliono davvero andare a vedere C?" Nel silenzio denso e imbarazzato che seguì, i nove si fermarono sotto la pioggia, scambiandosi sguardi obliqui. "Chi preferirebbe A invece che C"? Inquisì il dottor P. Sei mani si alzarono. Un dubbio stava risvegliandosi nella mente di tutti. "E chi preferisce A a B?". Quando le cinque mani si alzarono fu chiaro a tutti che la decisione giusta era di precipitarsi al cinema prima che iniziasse A. Ripresero la corsa per la città, stavolta (quasi) convinti.

Il problema della scelta sociale (cioè, il problema di aggregare scelte e preferenze di un certo numero di individui) è illustrato nella storiella appena vista: si cerca una modalità con cui le preferenze individuali confluiscano in una scelta comune, ottenuta aggregando le scelte singole. Come si è visto con i nove cinefili, il modo con cui questo avviene (il sistema di voto) influenza in modo significativo il risultato. I paradossi sorgono appunto perché non esiste un modo unico di mettere ai voti le decisioni, e quasi sempre a modalità di voto diverse corrispondono risultati diversi. Osserviamo per prima cosa che stiamo supponendo che i nove abbiano in sé, anche senza averla manifestata, una preferenza razionale sui tre film. Cioè, essi sarebbero in grado di disporre i tre candidati in una lista ordinata, con al primo posto il film migliore, al secondo posto quello medio e al terzo posto il peggiore. Per semplicità supponiamo che non reputino mai due film equivalenti. Quindi nel caso dei tre candidati A, B e C, una preferenza individuale non può che essere una delle sei possibili liste ABC, ACB, CAB, CBA, BCA e BAC (dove per ABC si intende che A è al primo posto, B al secondo e C al terzo; le preferenze vengono anche chiamate *profili* dei votanti). La dinamica della storiella si chiarisce se conosciamo le preferenze individuali: supponiamo che 2 cinefili abbiano la preferenza ACB, 3 di essi abbiano la CAB e i restanti 4 la BAC, come indicato nella tabella 1. È chiaro quindi che in una votazione che tenga conto solo della prima preferenza vince B con 4 voti, contro i 3 di C e i 2 dell'ultimo posto di A. Si noti anche che i cinefili alla fine si precipiteranno a vedere A, che in prima istanza fu scartato perché arrivato ultimo nella prima votazione (con la metà dei voti del vincitore). L'ultima decisione, suggerita dal dottor P., fu quella di confrontare a due a due i candidati: come si nota dai numeri della tabella 1, se si confronta A contro C si hanno i voti del profilo ACB sommati con quelli del profilo BAC, e quindi A contro C vince 6 a 3. Nello stesso modo, A contro B vince 5 a 4, dal momento che la preferenza di A su B è conseguenza dei profili ACB e CAB. Anche se irrilevante per la scelta di A, si può vedere che C vince contro B per 5 voti a 4. Cioè A vince contro tutti e B perde contro tutti.[1] Ma allora quello che, con confronti a due a due, tutti reputano inferio-

ACB	2
CAB	3
BAC	4

Tabella 1: Tabella delle preferenze

[1] Si dice quindi che A è il vincitore di Condorcet e B il perdente di Condorcet. Marie Jean Antoine Nicolas Caritat, Marquis de Condorcet fu uno dei primi a notare i paradossi dei sistemi di voto, e nel 1785 pubblicò il saggio *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à pluralité des voix* in cui introduce i confronti a due a due per determinare il vincitore (o il perdente) assoluto. Qualche anno prima, nel 1781 Jean-Charles de Borda pubblicò una *Mémoire sur les elections au scrutiny*, in cui proponeva un sistema di voto oggi noto come *conteggio di Borda* (lo stesso sistema di voto usato nel senato romano), che tenesse conto delle preferenze assegnando 0 punti al peggiore, 1 punto al penultimo, e così via fino al candidato ritenuto migliore.

re (B) viene eletto con la prima elezione a maggioranza, mentre quello che tutti reputano superiore (A) arriva all'ultimo posto... si capisce anche la perplessità dei cinefili. Come risolvere le perplessità dei cinefili? In che modo è possibile aggregare preferenze individuali?

Nel 1951 Kenneth Arrow (premio Nobel per l'economia nel 1972) nella sua tesi di dottorato affrontò il problema da un punto di vista diverso: invece che analizzare e creare sistemi di voto, si propose di definire "che cosa è" un sistema di voto in modo assiomatico, e derivarne così le conseguenze logiche. Introdusse quindi una serie di *assiomi* abbastanza ragionevoli da essere accettati da tutti e dedusse da questi un teorema sorprendente, chiamato ora *teorema dell'impossibilità di Arrow*. Cerchiamo ora di illustrare il teorema di Arrow nel particolare contesto in cui i votanti operano in modo razionale (cioè per le scelte di voto si basano su di un proprio ordine di preferenze in modo del tutto coerente) e manifestano le proprie preferenze senza strategie di voto (cioè votare per un candidato non gradito al fine di danneggiare un terzo candidato, votare per il secondo preferito per non disperdere voti, astenersi o annullare il voto,...). Una *funzione di scelta sociale* è un sistema (di voto) che trasforma l'insieme di tutti gli ordini di preferenza individuali (chiamati anche *profili di preferenza*) in un ordine di preferenza comune. Vediamo quali proprietà furono ritenute ragionevoli da Arrow.

Figura 1: Kenneth Arrow

- **Universalità:** Il sistema di voto dovrebbe essere un metodo *deterministico* che assegna per *ogni* insieme di preferenze individuali una e una sola preferenza collettivo. Questo, nel linguaggio della matematica, si traduce nel richiedere che la funzione di scelta sociale sia, appunto, una *funzione*.

- **Unanimità:** Se tutti i votanti preferiscono il candidato X al candidato Y, allora la società dovrebbe preferire il candidato X al candidato Y. [2]

- **Democraticità:** Il sistema di voto non dovrebbe considerare l'identità dei votanti, ma solamente l'insieme delle loro preferenze, e tutti i votanti hanno ugual peso.

  Non-dittatura: Nel teorema originale la richiesta più debole al posto della democraticità (ne è una conseguenza) è la seguente: Il sistema di voto non dovrebbe riflettere le opinioni di uno solo dei votanti, ignorando le altre.

- **Indipendenza dalle alternative irrilevanti:** La scelta sociale riguardo a due

[2] Invece che l'assioma di unanimità nel teorema originale c'è una richiesta più debole, detta di *monotonia*, o la condizione di ottimalità di Pareto.

candidati X e Y dovrebbe essere determinata solamente dalle preferenze individuali relative ai candidati X e Y, e non dalle altre alternative (dette quindi irrilevanti).

La richiesta di universalità è abbastanza naturale: ci si aspetta che il risultato delle elezioni non dipenda da fattori casuali o non controllabili e che in qualche modo riesca a riflettere le scelte individuali dei votanti. Il fatto che ci possano essere situazioni di parità non è un problema: basta modificare il nostro assetto (semplificato) e ammettere che sia i votanti che il risultato della votazione possano contemplare casi di pari valutazione. Nemmeno dell'unanimità si può dubitare: chi accetterebbe un sistema di voto che arbitrariamente modifichi le decisioni prese all'unanimità? Il principio di democraticità, a volte anche detto di anonimato, prevede che tutti i votanti siano uguali e non distinguibili (per evitare fenomeni di dittatura e di manipolazione del voto). È chiaro che è possibile costruire sistemi di voto non democratici o dittatoriali (la funzione di scelta sociale potrebbe associare a qualsiasi insieme di preferenze $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$ la preferenza x_1 del primo votante, per esempio), ma è altrettanto chiaro che si tratta di una scelta non davvero collettiva, dal momento che le preferenze di molti vengono semplicemente ignorate. Dell'indipendenza dalle alternative irrilevanti si è dibattuto molto, giacché è la richiesta meno evidente. Si può chiarire la sua natura con un esempio: se uno (C) di tre candidati A, B e C all'improvviso dopo le elezioni muore, allora si deve poter assegnare una preferenza alla scelta sociale solamente considerando le preferenze di tutti i votanti e cancellando C dalle loro liste. Non è ragionevole trovarsi nella condizioni in cui se C è vivo allora si preferisce A a B, mentre se C è morto allora si preferisce B ad A. Vedremo che l'indipendenza dalle alternative irrilevanti ha come conseguenza una sorta di *continuità* per la scelta sociale: per piccole variazioni nelle preferenze individuali si devono avere piccole variazioni nella scelta collettiva.

Esistono sistemi di voto che soddisfano questi requisiti minimi? Sorprendentemente, Arrow dimostrò che se ci sono almeno due votanti e almeno tre opzioni tra cui scegliere *non esiste una funzione di scelta sociale definita per preferenze razionali che soddisfi contemporaneamente gli assiomi di unanimità, democraticità e indipendenza dalle alternative irrilevanti.* Per quanto queste richieste possano sembrare ragionevoli, non esiste nessun tipo di voto razionale e deterministico che le soddisfi tutte. [3] Il teorema di impossibilità di Arrow diede un significativo impulso ad un approccio di tipo matematico all'economia e alle scienze sociali, che portò a innumerevoli scoperte sorprendenti (solo per citarne due a caso e di diversa importanza: l'impossibilità del liberismo Paretiano, dimostrata nel 1970

[3] C'è chi ha parlato di impossibilità della democrazia rappresentativa, dal momento che questa si basa sui medesimi requisiti di unanimità, democraticità e indipendenza dalle alternative irrilevanti. Nella realtà il sistema democratico è molto più complesso, e non tutti gli autori concordano sull'importanza dell'indipendenza dalle alternative irrilevanti.

dal premio Nobel per l'economia Amartya Sen, e il teorema di Gibbard-Satterthwaite: ogni sistema di voto non dittatoriale con più di tre opzioni di scelta è manipolabile – dove per manipolabile si intende che è possibile operare strategie di voto, cioè manifestare un ordine di preferenza diverso dal proprio al fine di favorire comunque il proprio candidato).

Cerchiamo di comprendere le linee di una interpretazione topologica[4] del teorema dell'impossibiltà di Arrow, pubblicata nei primi anni 80 da Graciela Chichilnisky [3]. Sia X l'insieme di tutti i possibili profili di preferenza $X = \{ABC, ACB, CAB, CBA, BCA, BAC\}$. Per semplicità chiamiamo solo *preferenza* un elemento di X, cioè quello che finora abbiamo chiamato ordine o profilo di preferenza. Se si cerca una funzione di scelta sociale per i nove cinefili, questa sarà una funzione $f\colon X^9 \to X$, cioè una funzione che associa ad ogni lista di 9 preferenze $(x_1, x_2, \dots, x_9) \in X^9$ (dove X^9 indica l'insieme di tutte le lista di nove elementi di X) una preferenza di X, che chiamiamo $f(x_1, x_2, \dots, x_9)$. La condizione di unanimità implica la seguente: se tutte le preferenze individuali coincidono ($x_i = x$ per $i = 1 \dots 9$), allora

$$f(x, x, \dots, x) = x \in X.$$

[4] La topologia (dal greco t'opos e l'ogos "studio dei luoghi") è la disciplina matematica che si occupa di studiare le proprietà di forme e figure a meno di deformazioni continue: è possibile per esempio deformare (senza spezzarlo) un quadrato in una circonferenza o in un rettangolo, ma non è possibile renderlo un segmento.

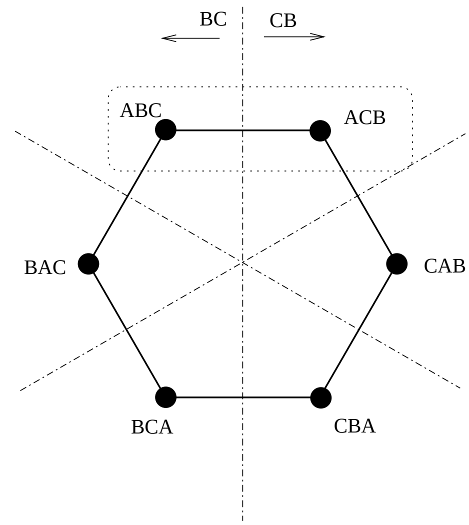

Figura 2: Lo spazio delle preferenze.

Infatti, se tutte le preferenze x_i sono uguali, significa che presi due candidati X e Y qualsiasi, verranno giudicati all'unanimità per esempio X superiore di Y. Ma allora lo stesso deve valere per $f(x, x, \dots, x)$, che non può essere che uguale a x per l'arbitrarietà di X e Y. La condizione di democraticità (anonimato) invece implica che presi per esempio x_1 e x_2, deve risultare

$$f(x_1, x_2, \dots, x_9) = f(x_2, x_1, \dots, x_9).$$

Cioè, scambiando tra loro il primo e il secondo votante non si deve cambiare il risultato delle votazioni.

Ora, osserviamo che lo spazio delle preferenze X può essere rappresentato come l'insieme dei vertici di un esagono regolare, come in figura 2. Osserviamo che i lati dell'esagono corrispondono a scambi dell'ordine di preferenza di due e solo due candidati.

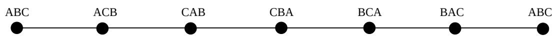

Figura 3: Lo spazio delle preferenze con gli estremi da identificare

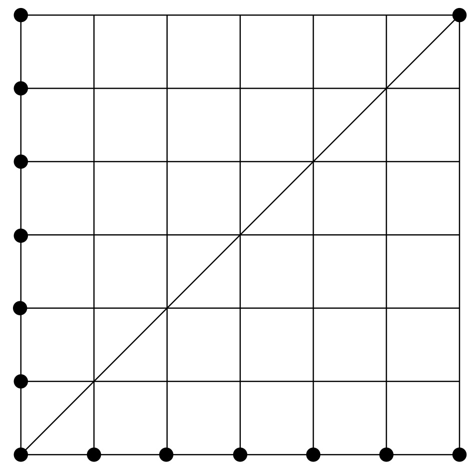

Figura 4: Lo spazio delle preferenze per due votanti

Per esempio, nel lato evidenziato i vertici ABC e ACB si ottengono l'uno dall'altro cambiando la preferenza di B e C, senza toccare la valutazione tra A e B o la valutazione tra A e C. Non è difficile osservare come dal vertice ABC si può percorrere in senso orario l'esagono operando gli scambi su BC, poi su AC, su AB, CB, CA ed infine su BA. Un'altra interessante caratteristica di questa rappresentazione è che i tre assi di simmetria indicati in figura dividono l'insieme dei vertici ognuno in due parti, in funzione della preferenza tra i due candidati che vengono scambiati lungo il lato tagliato dall'asse. Per esempio l'asse verticale suddivide l'esagono in due parti: quella a sinistra ha vertici in cui B è preferito a C, quella destra il contrario. C'è un'ultima simmetria dello spazio delle preferenze: la simmetria centrale. Se si considera di ogni vertice il suo simmetrico rispetto al centro, si osserva che la preferenza è quella esattamente *contraria*: il simmetrico di ABC è CBA.

Un modo equivalente di descrivere l'esagono in questione potrebbe essere quello di figura 3: si apre l'esagono spezzandone un vertice, marcando i due vertici con lo stesso nome in modo da ricordarsi che vanno riattaccati. Ora analizziamo il caso particolare (il più semplice, anche) in cui ci sono solo due votanti con tre candidati (se i candidati sono solo due il teorema dell'impossibilità di Arrow non vale). La funzione di scelta che cerchiamo sarà quindi una funzione $f\colon X \times X \to X$ con le due proprietà (dovute all'unanimità e alla democrazia)

$$f(x,x) = x \ \text{ e } \ f(x,y) = f(y,x).$$

Così come abbiamo rappresentato geometricamente lo spazio X delle preferenze, è possibile rappresentare il prodotto cartesiano $X \times X$. Il modo più semplice è utilizzare la figura monodimensionale 3, costruirne il prodotto cartesiano ed ottenere quindi il quadrato di figura 4: bisogna però ricordare che gli estremi del segmento di figura 3 sono identificati tra loro, e dunque i lati paralleli del quadrato sono anch'essi identificati tra loro (cioè rappresentano gli stessi punti). La forma reale sarebbe quindi il cosiddetto *toro*, rappresentato in figura 5. La condizione di unanimità dice semplicemen-

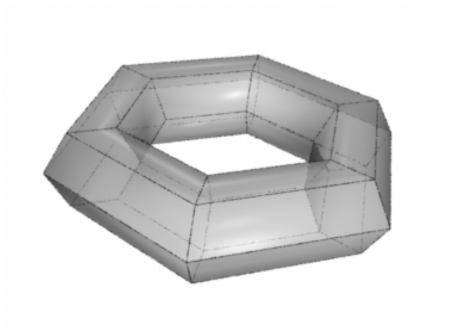

Figura 5: Rappresentazione tridimensionale dello spazio delle preferenze per due votanti.

te che la funzione di scelta ristretta alla diagonale del quadrato (cioè alle coppie (x, x) con $X \in X$) deve essere $f(x, x) = x$, mentre la condizione di democrazia dice che f deve essere invariante rispetto alla riflessione lungo la diagonale del quadrato (cioè il valore di f nel punto (x, y) è uguale a quello nel punto (y, x), che si ottiene da (x, y) riflettendo lungo la diagonale).

Veniamo alla condizione che non abbiamo considerato finora: l'indipendenza dalle alternative irrilevanti. Questa condizione, controversa e di importanza fondamentale, ha una semplice conseguenza per la funzione $f(x, y)$. Consideriamo un nodo (x_0, y_0) del quadrato. Sia x_0 che y_0 sono elementi di X, cioè vertici dell'esagono di figura 2. Il risultato della votazione $f(x_0, y_0)$ sarà anch'esso un vertice di X, che chiamiamo v. Tutti i (quattro) nodi (nella quadrettatura del quadrato) adiacenti a (x_0, y_0) sono raggiungibili attraversando uno dei quattro segmenti che partono da (x_0, y_0) (vedi figura 6).

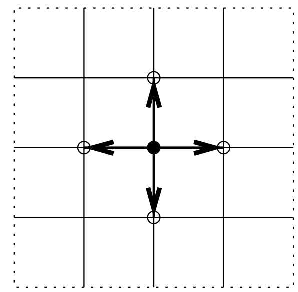

Figura 6: Nodi adiacenti

In altre parole, i nodi adiacenti si ottengono da (x_0, y_0) operando uno scambio delle preferenze per x_0 (in due modi possibili, come abbiamo visto sopra) oppure per y_0. Dal momento che uno scambio della preferenza relativo a due candidati X e Y (e che non incide sulla valutazione del terzo candidato) può avere come effetto nel valore della funzione di scelta sociale f un cambio della posizione reciproca di X e Y ma *non* della valutazione del terzo candidato, succede che i valori di f sui nodi adiacenti a (x_0, y_0) devono essere vertici adiacenti a v in X (o anche coincidenti con v). Questo è molto importante: implica che la funzione f (definita inizialmente solo su tutti i vertici dei quadratini in cui è suddiviso il quadrato e a valori nei vertici dell'esagono) può essere *estesa* ad una funzione *continua* definita non solo sull'insieme dei (36) nodi ma anche sull'unione dei segmenti che li collegano all'interno del quadrato (più precisamente, nel toro di figura 5); naturalmente, la funzione assumerà i valori nell'esagono. Ma non solo: ora la funzione è definita sui 36 nodi e i segmenti che li collegano ed è possibile estenderla anche all'interno dei singoli quadratini in cui è suddiviso $X \times X$, naturalmente in modo

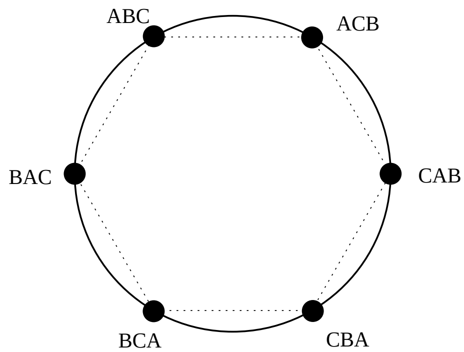

Figura 7: Deformazione continua dello spazio delle preferenze

continuo. Infatti, se si considera uno dei quadratini di figura 4, da uno dei suoi vertici si raggiungono i tre altri vertici attraversando al massimo due segmenti (i suoi lati). Ad ogni attraversamento corrisponde, considerando le immagini di f in X, un passaggio di zero o un lato dell'esagono (cioè l'immagine del lato è un lato dell'esagono oppure è identicamente costante su un vertice), per cui i quattro vertici del quadratino hanno immagini sicuramente contenute in una delle metà tagliate dai tre assi di simmetria (per almeno uno degli assi di simmetria indicati in figura 2). Non è difficile quindi immaginare che esiste una estensione della funzione anche all'interno del quadratino, per ognuno dei quadratini. In trentasei passi è quindi possibile definire la funzione f in modo continuo su tutto il quadrato (con le identificazioni al bordo).

Prima di passare alle conclusioni, osserviamo che è possibile deformare in modo continuo l'esagono e trasformarlo in una circonferenza, come indicato in figura 7. Se indichiamo con S^1 la circonferenza ottenuta, allora una volta identificati di nuovo gli estremi degli intervalli del quadrato di figura 4 si ottiene il prodotto cartesiano $S^1 \times S^1$.

Abbiamo concluso che se esiste una funzione di scelta sociale che soddisfa contemporaneamente gli assiomi di unanimità, democraticità e indipendenza dalle alternative irrilevanti, allora è possibile definire una funzione *continua* $f \colon S^1 \times S^1 \to S^1$ tale che $f(x, x) = x$ e $f(x, y) = f(y, x)$. Il problema è che tale funzione non può esistere. Questo si può concludere applicando alcune tecniche elementari di topologia (i dettagli possono essere facilmente trovati in [4], per esempio). L'idea fondamentale è la seguente: non è possibile deformare con continuità un disco per trasformarlo in un anello. Per poterlo fare è necessario bucarlo, tagliarlo oppure romperlo. [5] L'idea è che se consideriamo l'immagine della diagonale di $X \times X$ in X, questa per la condizione "$f(x, x) = x$" sarà un anello che gira attorno a S^1 una sola volta. Ma possiamo deformare con continuità la diagonale di $X \times X$ e costruire un cammino che segue prima X in orizzontale (il lato inferiore del quadrato) e successivamente X in verticale (il lato destro del quadrato). Per la simmetria $f(x, y) = f(y, x)$ e l'identificazione degli estremi, le immagini dei due lati in considerazione mediante f coincidono, per cui il cammino immagine deve necessariamente girare attorno a S^1 un numero pa-

[5] L'approfondimento di questa semplice osservazione è alla base delle dimostrazioni di noti risultati quali per esempio il teorema di punto fisso di Brouwer o il teorema di Borsuk-Ulam.

ri di volte (una prima metà come immagine del lato orizzontale e una seconda metà come immagine del lato verticale). Questo è assurdo, dato che 1 non è un numero pari.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] Arrow, K.J. *Social Choice and Individual Values* (Yale University Press), 1951.

[2] Baryshnikov, Y.M. *Topological and discrete social choice: in a search of a theory*, Social Choice and Welfare, 1997.

[3] Chichilnisky, G. *Social Choice and the Topology of Spaces of Preferences*, Advances in Mathematics, 1980.

[4] Spanier, E. *Algebraic Topology*, McGraw–Hill, New York, 1966.