Cognome: .... **Nome:** .... **Matricola:** ....

Dare una dimostrazione esauriente di tutte le risposte, su un foglio a parte (scrivere nome e matricola su tutti i fogli consegnati).
Il peso relativo di ogni esercizio è indicato tra parentesi.

(1) (6u) Sia $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio definito da

$$\Delta = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{bmatrix} = 0\}.$$

Sia $G = S_3$ il gruppo di permutazioni di tre elementi (cioè il gruppo di tutte le corrispondenze biunivoche dell'insieme $\{1, 2, 3\}$ in sé), che agisca su $\mathbb{R}^3$ nel modo seguente: per ogni $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $g \cdot \boldsymbol{x}$ è definito da

$$g \cdot \boldsymbol{x} = (x_{g(1)}, x_{g(2)}, x_{g(3)}).$$

Sia $X = \mathbb{R}^3 \setminus \Delta$ il complementare di Δ in $\mathbb{R}^3$. Dimostrare le seguenti proposizioni.

(a) L'azione di G su $\mathbb{R}^3$ è ben definita.

(b) Il sottospazio Δ è chiuso in $\mathbb{R}^3$.

(c) Il sottospazio Δ è connesso.

(d) Per ogni $g \in G$, $gX = X$ e $g\Delta = \Delta$. Quindi in particolare G agisce su X.

(e) Lo spazio delle orbite (con la topologia quoziente) X/G è connesso.

(f) Quante sono le componenti connesse dello spazio X ?

(2) (4u) Siano P_0, P_1, ..., P_n punti qualsiasi dello spazio affine $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$. Sia $[P_0, P_1, \ldots, P_n] \subset \mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ l'insieme definito da

$$[P_0, P_1, \ldots, P_n] = \left\{ O + \sum_{j=0}^{n} t_j(P_j - O) : \sum_{j=0}^{n} t_j = 1, (\forall j) t_j \geq 0 \right\}$$

per un certo $O \in \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$. Chiamiamolo *inviluppo* dell'insieme degli $n+1$ punti $P_0, \ldots, P_n$. Dimostrare le seguenti affermazioni.

(a) L'insieme $[P_0, P_1, \ldots, P_n]$ non dipende dalla scelta del punto O.

(b) Se $A, B \in [P_0, P_1, \ldots, P_n]$, allora per ogni $t \in [0, 1]$ si ha $tA + (1-t)B \in [P_0, P_1, \ldots, P_n]$.

(c) Per ogni sottoinsieme $\{Q_0, Q_1, \ldots, Q_k\} \subseteq \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ si ha l'inclusione

$$[Q_0, Q_1, \ldots, Q_k] \subseteq [P_0, P_1, \ldots, P_n] .$$

(d) Esiste sempre un sottoinsieme $\{Q_0, Q_1, \ldots, Q_k\} \subseteq \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ che sia minimale tra quelli per cui $[Q_0, Q_1, \ldots, Q_k] \subseteq [P_0, P_1, \ldots, P_n]$, cioè tale che ogni sottoinsieme proprio di $\{Q_0, \ldots, Q_k\}$ non genera l'inviluppo $[P_0, \ldots, P_n]$.

(3) (5u) Per ogni coppia di insiemi finiti $A, B \subset \mathbb{E}^2$ di punti del piano euclideo, sia $h(A, B)$ definito da

$$h(A, B) = \max_{a \in A} \min_{b \in B} \|a - b\|$$

dove $\|a - b\|$ è la distanza euclidea tra i due punti a e b di $\mathbb{E}^2$. Dimostrare le seguenti affermazioni.

(a) $h(A, B) = 0 \iff A \subseteq B$.

(b) Per ogni $A \in \mathbb{E}^2$ e ogni $B \subset \mathbb{E}^2$, per ogni $a \in A$ si ha la disuguaglianza

$$h(\{a\}, B) \leq h(A, B) = \max_{a \in A} \left(h(\{a\}, B) \right).$$

(c) Se a è un punto di $\mathbb{E}^2$, e $C, B \subset \mathbb{E}^2$ sono due insiemi finiti di punti, allora esistono $b_0 \in B$ e $c_0 \in C$ tali che

$$h(\{a\}, C) = \|a - c_0\|, \quad h(\{c_0\}, B) = \|c_0 - b_0\|.$$

(d) Dedurre di due punti precedenti che

$$h(\{a\}, B) \leq h(\{a\}, C) + h(C, B)$$

(e) Se A, B, C sono sottoinsiemi finiti di $\mathbb{E}^2$, allora

$$h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B).$$

La funzione $h(A, B)$ è una metrica sullo spazio di tutti i sottoinsimi finiti di $\mathbb{E}^2$?