Cognome:........................ **Nome:**........................ **Matricola:**........................

Dare una dimostrazione esauriente di tutte le risposte, su un foglio a parte (scrivere nome e matricola su tutti i fogli consegnati).
Il peso relativo di ogni esercizio è indicato tra parentesi.

(1) (6u) Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo di dimensione 3. Sia P lo spazio di tutti i polinomi monici di grado tre, cioè lo spazio di tutti i polinomi del tipo

$$p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_j \in \mathbb{R}, j = 0, 1, 2.$$

Su $P \times P$ si definisca la seguente funzione: dati due polinomi monici p e q di grado tre,

$$d(p, q) = \sqrt{(p(0) - q(0))^2 + (p(1) - q(1))^2 + (p(-1) - q(-1))^2}.$$

(a) Mostrare che se
$$p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$
allora
$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 + 1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(-1) \end{bmatrix}$$
La funzione $(a_0, a_1, a_2) \mapsto (p(0), p(1), p(-1))$ è una affinità?

(b) Mostrare che d è una metrica su P.

(c) Si consideri ora la funzione $f \colon \mathbb{E}^3 \to P$ definita ponendo
$$f((x_1, x_2, x_3)) = p \in P, \quad \text{dove } p(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$
per ogni $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3$. Mostrare che f è ben definita e continua.

(d) La funzione f è suriettiva?

(e) La funzione f è iniettiva? Quante sono le controimmagini di un punto di P? Sono sempre un numero finito?

(f) C'è un gruppo G che agisce su $\mathbb{E}^3$ e tale che $f \colon \mathbb{E}^3 \to P$ passa al quoziente su $\mathbb{E}^3/G$ e induce una funzione continua e iniettiva $f \colon \mathbb{E}^3/G \to P$?

(2) (5u) Si consideri in $\mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$ (con coordinate $[x : y : u]$) il gruppo G di tutte le proiettività che mandano la retta $r = \{u = 0\}$ (retta impropria) in sé, cioè $g([x : y : 0]) \in r$ per ogni x, y.

(a) Mostrare che G manda la parte affine $\{u \neq 0\}$ in sé, cioè che $g \in G, P \notin r \implies g(P) \notin r$.

(b) Mostrare che se $g \in G$, e $g(P) = P$ per ogni $P \notin r$, allora $g(P) = P$ per ogni $P \in r$.

(c) Mostrare che esistono $g \in G$ tali che $g(P) \neq P$ per ogni $P \in r$.

(d) Mostrare che esistono $g \in G$ tali che $g(P) = P$ per ogni $P \in r$, ma $g(P) \neq P$ per ogni $P \notin r$.

(e) Sia $g \in G$ tale che esiste $P \in r$ tale che $g(P) \neq P$: qual è il massimo numero possibile di elementi dell'insieme

$$\mathrm{Fix}(g) \cap r = \{P \in r : g(P) = P\} \ ?$$

(3) (4u) Si consideri in $\mathbb{R}$ la seguente famiglia τ di sottoinsiemi: $A \in \tau$ se e soltanto se $\mathbb{R} \smallsetminus A$ ha un numero finito di elementi oppure $\mathbb{R} \smallsetminus A = \mathbb{R}$.

(a) Mostrare che τ è una topologia per $\mathbb{R}$.

(b) Si chiami X lo spazio topologico costituito da $\mathbb{R}$ con la topologia metrica euclidea, e Y lo spazio topologico costituito da $\mathbb{R}$ con la topologica τ. Mostrare che la funzione $f \colon X \to Y$ definita ponendo $f(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ è una funzione continua.

(c) Mostrare che f non è un omeomorfismo.

(d) Mostrare che $\mathbb{R}$ non è di Hausdorff con la topologia τ, cioè che Y non è di Hausdorff. È connesso?