Cognome:........................**Nome:**........................**Matricola:**........................

Dare una dimostrazione esauriente di tutte le risposte, su un foglio a parte (scrivere nome e matricola su tutti i fogli consegnati).
Il peso relativo di ogni esercizio è indicato tra parentesi.

(1) (6u) Siano H e R le due matrici

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sia $G = \{1, R, R^2, R^3, H, HR, HR^2, HR^3\}$.

Per ogni matrice $M \in O(3)$, si indichi con $\mathrm{Fix}(M)$ l'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^3$ fissati da M, cioè

$$\mathrm{Fix}(M) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\},$$

dove il prodotto tra la matrice M e il vettore $\boldsymbol{x}$ è il prodotto righe-per-colonne.

Dimostrare le seguenti affermazioni.

(a) G è un sottogruppo di $O(3)$.

(b) $\bigcap_{g \in G \smallsetminus \{1\}} \mathrm{Fix}(g) = \{\boldsymbol{0}\}$

(c) $\bigcup_{g \in G \smallsetminus \{1\}} \mathrm{Fix}(g) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z(x^2 + y^2) = 0\}$.

(d) Se $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è la funzione definita da $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$, allora $\forall g \in G, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, $f(g\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$. Dedurre che per ogni $g \in G$, g manda l'insieme dei piani coordinati $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ in sé, cioè $g(Y) = Y$.

(e) L'insieme dei vettori con coordinate tutte diverse da zero $X = \mathbb{R}^3 \smallsetminus Y$ ha 8 componenti connesse, una in ogni *ottante* di $\mathbb{R}^3$.

(f) G agisce in modo transitivo sull'insieme delle componenti connesse di X.

(2) (5u) Sia $V = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$ $\mathbb{P}(V)$ il proiettivizzato di V, cioè

$$\mathbb{P}(V) = (V \smallsetminus \{\boldsymbol{0}\})_{\sim}$$

dove la relazione di equivalenza '$\sim$' è data dalla relazione standard di proporzionalità.

Dimostrare le seguenti affermazioni.

(a) $\mathbb{P}(V)$ è un piano proiettivo a coefficienti reali, isomorfo a $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

(b) Sia $\Delta \subset V$ l'insieme definito da

$$\Delta = \{[x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \in \mathbb{P}(V) : x_i = x_j \text{ per qualche coppia di indici } i, j \text{ con } i \neq j\}.$$

Allora Δ è l'unione di 6 rette distinte di $\mathbb{P}(V)$.

(c) Esistono tre e solo tre punti di $\mathbb{P}(V)$ che appartengono ad esattamente 2 rette distinte di Δ. Quali sono le coordinate omogenee di tali punti?

(d) Esistono quattro e solo quattro punti di $\mathbb{P}(V)$ che appartengono ad esattamente 3 rette distinte di Δ. Quali sono le coordinate omogenee di tali punti?

(e) Il numero di componenti connesse di $\mathbb{P}(V) \smallsetminus \Delta$ è 12.

(3) (4u) Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, con la topologia della metrica euclidea. Si definisca su D la relazione data da

$$(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2) \iff (x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2) \vee (x_1 = -x_2 \wedge y_1 = -y_2)\,,$$

e sia $f\colon D \to \mathbb{R}^2$ la funzione definita ponendo

$$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)\ .$$

(a) Mostrare che '$\sim$' è una relazione di equivalenza. Si indichi con $D/_\sim$ lo spazio quoziente, con la topologia quoziente.

(b) Mostrare che f è costante sulle classi di equivalenza in D, e quindi che passa al quoziente inducendo una funzione continua $\bar{f}\colon D/_\sim \to \mathbb{R}^2$.

(c) Si mostri che $f(D) = \bar{f}(D/_\sim) = D \subset \mathbb{R}^2$.

(d) Si dimostri che $\bar{f}$ è una funzione chiusa. È un omeomorfismo?