Cognome: .... **Nome:** .... **Matricola:** ....

Dare una dimostrazione esauriente di tutte le risposte, su un foglio a parte (scrivere nome e matricola su tutti i fogli consegnati). Il peso relativo di ogni esercizio è indicato tra parentesi.

(1) (5u) Siano in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ definiti i seguenti punti: $A = [1:0:1]$, $B = [2:0:1]$, $C = [1:2:1]$, $D = [0:1:1]$, $A' = [0:0:1]$, $B' = [1:0:1]$, $C' = [1:1:1]$, $D' = [0:1:1]$. Se M è una matrice, si indichi con M^* la matrice $M^* = \det(M)M^{-1}$, definita da

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} m_{22}m_{33} - m_{23}m_{32} & m_{32}m_{13} - m_{12}m_{33} & m_{12}m_{23} - m_{22}m_{13} \\ -m_{21}m_{33} + m_{31}m_{23} & m_{11}m_{33} - m_{31}m_{13} & -m_{11}m_{23} + m_{21}m_{13} \\ m_{21}m_{32} - m_{31}m_{22} & -m_{11}m_{32} + m_{31}m_{12} & m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12} \end{bmatrix}.$$

Siano w_j e z_j per $j = 1, \ldots, 4$ definiti da

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; w_4 = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right), \; \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; z_4 = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

Siano F e G le due matrici definite dai prodotti

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostrare che per $j = 1, \ldots, 4$, i valori di w_j e z_j sono ben definiti.

(b) Siano $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{e}_3$ i vettori della base standard di $\mathbb{R}^3$. Mostrare che $[F\boldsymbol{e}_1] = A$, $[F\boldsymbol{e}_2] = B$, $[F\boldsymbol{e}_3] = C$, $[G\boldsymbol{e}_1] = A'$, $[G\boldsymbol{e}_2] = B'$, $[G\boldsymbol{e}_3] = C'$.

(c) Mostrare che $[F(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)] = D$ e $[G(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)] = D'$.

(d) È possibile determinare due proiettività $f, g \colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tali che $f([1:0:0]) = A$, $f([0:1:0]) = B$, $f([0:0:1]) = C$, $f([1:1:1]) = D$, $g([1:0:0]) = A'$, $g([0:1:0]) = B'$, $g([0:0:1]) = C'$, $g([1:1:1]) = D'$? Che legame hanno con le matrici F e G?

(e) Scrivere esplicitamente, se esiste, la matrice di una proiettività che manda A, B, C, D in A', B', C', D' rispettivamente.

(2) (6u) Sia $X = \mathbb{R}^2$ con la metrica standard euclidea, e $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo, per ogni $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in X$ e $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in X$,

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| & \text{se } x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \\ \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\| & \text{se } x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0 \end{cases}$$

Dimostrare le seguenti affermazioni.

(a) La funzione d è ben definita, e se $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$, allora $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

(b) La funzione d è una metrica su X.

(c) Si indichi con $B^d_r(\boldsymbol{x})$ l'intorno circolare di centro $\boldsymbol{x}$ e raggio $r > 0$, rispetto alla metrica d. Mostrare che $B^d_1(\boldsymbol{0})$ è uguale a

$$B^d_1(\boldsymbol{0}) = \{\boldsymbol{x} \in X : \|\boldsymbol{x}\| < 1\} .$$

(d) Se $\boldsymbol{x} \in X$ e $r \leq \|\boldsymbol{x}\|$, allora $B^d_r(\boldsymbol{x})$ è contenuto nel segmento $[\boldsymbol{0}, 2\boldsymbol{x}] = \{t\boldsymbol{x} : t \in [0, 2]\} \subset X$.

(e) La chiusura di $B^d_1(\boldsymbol{0})$ in X è uguale a $Y = \{\boldsymbol{x} \in X : \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\}$.

(f) Il ricoprimento aperto di Y formato da $B^d_{2/3}(P)$, per tutti i punti $P \in \{\boldsymbol{x} \in X : \|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|^2\}$, non ammette alcun sottoricoprimento finito. È vero quindi che Y non è compatto pur essendo chiuso e limitato?

(3) (4u) Sia A la matrice definita da

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

a coefficienti in $\mathbb{F}_5$ (il campo degli interi $\mod 5$, aka classi di resti modulo 5). Per ogni $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{A}^2(\mathbb{F}_5)$, si definisca $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, cioè $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ con $y_1 = 3x_1 - 4x_2$ e $y_2 = 4x_1 + 3x_2$.

(a) Mostrare che f è una funzione affine non costante di $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_5)$ in sé.

(b) Sia $S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{A}^2(\mathbb{F}_5) : 3x_1 - x_2 = 0 \mod 5\}$. Mostrare che $f(\boldsymbol{x}) \in S$ per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{A}^2(\mathbb{F}_5)$.

(c) Sia $W = \{\boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{F}_5^2 : v_1 + 2v_2 = 0 \mod 5\}$. Mostrare che per ogni $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{A}^2(\mathbb{F}_5)$, se $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in W$, allora $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$.

(d) Mostrare che f è la proiezione (parallela) di $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_5)$ sul sottospazio S, parallela alla giacitura W.