Cognome: .... **Nome**: .... **Matricola**: ....

Dare una dimostrazione esauriente di tutte le risposte, su un foglio a parte (scrivere nome e matricola su tutti i fogli consegnati). Il peso relativo di ogni esercizio è indicato tra parentesi.

(1) (6u) Si consideri la mappa $s\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \to S^1$ definita ponendo

$$s(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) \in S^1 = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 = 1\},$$

per ogni $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$. Dimostrare le seguenti affermazioni.

(a) La mappa s è ben definita.

(b) La mappa s passa al quoziente $q\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, cioè esiste una unica mappa $f\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to S^1$ tale che valga l'uguaglianza $f \circ q = s$.

(c) La mappa f è continua.

(d) Per ogni coppia di vettori $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$, sia $\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ la funzione definita da

$$\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{4}{(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)} \left(\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \right)^2$$

Essa induce una funzione $\hat{\delta}\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita ponendo $\hat{\delta}([\boldsymbol{x}], [\boldsymbol{y}]) = \delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

(e) Se j indica la carta affine $j(x) = [x : 1]$, allora la composizione $f \circ j\colon \mathbb{A}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to S^1$ è suriettiva? Qual è l'immagine del punto all'infinito? La mappa f è suriettiva.

(f) Per ogni coppia di punti $P, Q \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, $\hat{\delta}(P, Q) = \|f(P) - f(Q)\|^2$, cioè per ogni x_1, x_2, y_1, y_2 si ha

$$\frac{4}{(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)} \left(\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \right)^2 = \left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{y_1^2 - y_2^2}{y_1^2 + y_2^2} \right)^2 + \left(\frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{2y_1y_2}{y_1^2 + y_2^2} \right)^2$$

e di conseguenza f è iniettiva; dunque f è un omeomorfismo.

(2) (5u) Sia $X \subset \mathbb{E}^2$ il sottospazio definito da $X = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : (x-y)^2 \leq 1\}$. Sia $g\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ la funzione definita da $g(x,y) = (y+1, x+1)$. Dimostrare le seguenti affermazioni.

(a) La funzione g è una affinità e una isometria.

(b) $g(X) = X$.

(c) Per ogni $n \in \mathbb{Z}$, si indichi con g^n l'*iterata* n-esima di g, cioè

$$g^n = \begin{cases} \underbrace{g \circ \cdots \circ g}_{n \text{ volte}} & \text{se } n > 0 \\ 1 & \text{se } n = 0 \\ \underbrace{g^{-1} \circ \cdots \circ g^{-1}}_{-n \text{ volte}} & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

Per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, si ha che $g^n \neq 1$.

(d) Sia $G = \{g^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Allora G è un gruppo, e agisce su X ponendo $g^n \cdot P = g^n(P)$ per ogni $g^n \in G$ e ogni $P \in X$.

(e) Se $X_0 \subset X$ è il sottospazio definito da $X_0 = \{(x,y) \in X : (x+y)^2 < 1\}$, allora per ogni $P \in X_0$ e per ogni $n \neq 0$ si ha $g^n(P) \notin X_0$. Questa proprietà non è vera per la chiusura di X_0 in X, $\overline{X}_0 = \{(x,y) \in X : (x+y)^2 \leq 1\}$.

(3) (4u) Sia $L \subset \mathbb{E}^2$ l'insieme di tutti i punti a coordinate intere: $L = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2\} \subset \mathbb{E}^2$. Siano $A, B, C \in L$ tre punti a coordinate intere $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$, che non siano allineati. Siano $x_m = \min\{a_1, b_1, c_1\}$, $x_M = \max\{a_1, b_1, c_1\}$, $y_m = \min\{a_2, b_2, c_2\}$ e $y_M = \max\{a_2, b_2, c_2\}$, e R il rettangolo definito da $R = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : x_m \leq x \leq x_M \ \& \ y_m \leq y \leq y_M\}$.

Dimostrare le seguenti affermazioni.

(a) L'area del triangolo ABC è uguale a

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} |(a_1 - c_1)(b_2 - c_2) - (a_2 - c_2)(b_1 - c_1)| \, .$$

(b) Si ha che $x_m < x_M$, $y_m < y_M$, e il triangolo ABC è contenuto in nel rettangolo R.

(c) Almeno uno dei vertici di R coincide con uno dei punti A, B, C.

(d) A meno di permutare i nomi dei punti A, B, C e a meno di isometrie, si può supporre che C sia il vertice di R con $c_1 = c_2 = 0$, e $a_1 \geq b_1 \geq c_1 = 0$, $b_2 \geq a_2 \geq c_2 = 0$; quindi $a_1 b_2 \geq a_2 b_1$ e l'area di ABC soddisfa la disuguaglianza

$$\mathcal{A} \leq \frac{(x_M - x_m)(y_M - y_m)}{2} \, .$$