ESERCIZI

*✎**(4.1)** Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto. Un numero $m \in \mathbb{R}$ è un *maggiorante* se $\forall a \in A, a \leq m$ (per definizione, un insieme limitato superiormente è un insieme con almeno un maggiorante). L'insieme di tutti i maggioranti di A è chiuso? È limitato inferiormente (*nota: l'estremo superiore* $\sup A$ *è il minimo dell'insieme dei maggioranti*)?

***(4.2)** Dimostrare che se $A \subset \mathbb{R}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ (con la metrica euclidea), allora $\sup A$ e $\inf A$ appartengono alla chiusura $\overline{A}$.

✎**(4.3)** Sia $C \subset [a,b] \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme chiuso di $[a,b]$ (chiuso nella topologia indotta su $[a,b]$ da $\mathbb{R}$). Dimostrare che C è chiuso in $\mathbb{R}$. Dimostrare che la stessa proprietà è falsa per gli aperti: trovare un sottoinsieme $A \subset [a,b] \subset \mathbb{R}$ aperto nella topologia di $[a,b]$ ma non in quella di $\mathbb{R}$.

(4.4) Dimostrare che uno spazio X metrizzabile è di Hausdorff.

(4.5) Sia $A \subset X$ un sottoinsieme di X spazio topologico. Dimostrare che $x \in X$ è un punto di accumulazione di A se e solo se

$$x \in \overline{A \smallsetminus \{x\}}.$$

(4.6) Dimostrare che ogni sottosuccessione di una successione convergente converge.

(4.7) Dimostrare l'unicità del limite di successioni in spazi di Hausdorff: Se X è uno spazio di Hausdorff e $\{x_n\}$ una successione in X, allora $\lim_n x_n = \bar{x}$ e $\lim_n x_n = \bar{y}$ implica $\bar{x} = \bar{y}$.

***(4.8)** Diciamo che un famiglia di chiusi di uno spazio topologico X ha la FIP (*finite intersection property*) se

$$\forall J_0 \subset J, |J_0| < \infty \implies \bigcap_{i \in J_0} C_i \neq \emptyset$$

(l'intersezione di ogni sottofamiglia finita di chiusi è non vuota). Diciamo che X ha la FIP se ogni sua famiglia di chiusi con la FIP ha intersezione non vuota:

$$\bigcap_{i \in J} C_i \neq \emptyset.$$

Dimostrare che X è compatto se e solo se ha la FIP. (*Suggerimento:* $X \smallsetminus C_i$ *è aperto, e quindi…*).

***(4.9)** Dimostrare che l'ultimo assioma della lista di assiomi di $\mathbb{R}$ è ridondante (si può dedurre dai primi 7).

✎**(4.10)** È vero che se un insieme X è finito allora è compatto per ogni topologia che si considera? E il viceversa (cioè è vero che se un insieme è compatto rispetto ad ogni possibile topologia, allora ha un numero finito di punti)?

(4.11) Si consideri la famiglia τ di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ costitutita dall'insieme vuoto, da $\mathbb{N}$ e da tutti i sottoinsiemi del tipo

$$\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4, 5\} \dots$$

È vero che τ è una topologia? Se sì, allora, rispetto a questa topologia, $\mathbb{N}$ è compatto?

(4.12) Determinare se l'intervallo $I = \{x, \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ meno un punto $x_0 \in I$ è compatto, al variare di x_0. ($I \smallsetminus x_0 = \{x \in I : x \neq x_0\}$).

(4.13) Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ definito da

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, |pq| \leq 10^{100} \right\}.$$

Determinare quali delle seguenti affermazioni è vera (nella topologia euclidea di $\mathbb{R}$):

(i) X è chiuso;

(ii) X è aperto;

(iii) X è compatto.

(4.14) Sia a_n la successione di numeri razionali ($n \geq 1$) definita come segue:

$$a_n = \frac{p}{q} \text{ se } n = 2^p q \text{ con } q \text{ dispari.}$$

Se n è dispari risulta quindi $a_n = 0$ (dato che l'unico modo di scrivere un numero dispari nella forma $2^p q$ è con $p = 0$). Quali sono i suoi punti di accumulazione, cioè i punti di accumulazione dell'insieme

$$X = \{a_n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}?$$

Quali sono i punti limite di sottosuccessioni convergenti di a_n?

(4.15) Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme definito da

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^3 - x\}.$$

Quali delle seguenti sono vere?

(i) X è un chiuso di $\mathbb{R}^2$.

(ii) La parte $X \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$ è compatta.

(iii) L'interno di X in $\mathbb{R}^2$ è vuoto.

✎**(4.16)** Determinare quali dei seguenti spazi sono tra loro omeomorfi (esibendo gli omeomorfismi, altrimenti dimostrando in modo un po' intuitivo – non rigoroso – quando e se non ne esistono).

(i) L'intervallo chiuso $[0,1]$;

(ii) La circonferenza $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

(iii) Il quadrato: $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2-1)(y^2-1) = 0, x^2 \leq 1 \geq y^2\}$.

(iv) L'intervallo aperto $(0,1)$.

✎ **(4.17)** Si consideri nello spazio $\mathbb{R}$ la relazione: $x \sim y \iff \sin^2 x = \sin^2 y$.

(i) È una relazione di equivalenza?

(ii) Se sì, si dia a $X = \mathbb{R}/_\sim$ la topologia quoziente. Lo spazio così ottenuto è compatto?

****(4.18)** Sia $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$ lo spazio di tutte le successioni di punti dell'intervallo unitario della retta reale, cioè lo spazio definito come $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$ l'insieme di tutte le funzioni $x\colon \mathbb{N} \to [0,1]$. Per ogni famiglia finita di aperti di $[0,1]$

$$U_0, U_1, U_2, \ldots, U_N \subset [0,1]$$

(con $U_i \subset [0,1]$ aperto per $i = 0,1,\ldots,N$) si consideri in X l'insieme

$$\Phi(U_0, U_1, \ldots, U_N) := \{x \in X : \forall i \in \{0,1,\ldots,N\}, x(i) \in U_i\} \subset X.$$

Sia $\mathcal{A}$ la famiglia di *tutti* i possibili insiemi $\Phi(U_0, U_1, \ldots, U_N)$ al variare di $N \in \mathbb{N}$ e degli U_i.

(i) Dimostrare che $\emptyset \in \mathcal{A}$ e $X \in \mathcal{A}$.

(ii) Dimostrare che $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \implies A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$.

(iii) Dimostrare che esistono $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ tali che $A_1 \cup A_2 \notin \mathcal{A}$.

(iv) Per ogni $N \in \mathbb{N}$, sia A_N l'insieme definito da

$$A_N = \{x \in X : x(N) \in [0, 1/2)\}.$$

Dimostrare che $A_N \in \mathcal{A}$. Descrivere l'insieme

$$A = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} A_N$$

e determinare se $\mathcal{A}$ è una topologia per X.

(v) Dimostrare che $\mathcal{A}$ è una base per una topologia su X.

(vi) Si consideri la funzione $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ definita da $d(x,y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \dfrac{|x(n) - y(n)|}{2^n}$. Dimostrare che d è ben definita e che è una metrica su X.

(vii) Dimostrare che gli intorni sferici in X

$$B_r(z) = \{x \in X : d(x,z) < r\}$$

sono aperti di X rispetto alla topologia generata da $\mathcal{A}$ *(suggerimento: se $y \in B_r(z)$, allora esiste $\delta > 0$ tale che $d(z,y) = r - \delta$. Esistono allora certamente $N > 0$ e $\epsilon > 0$ tali che $\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} < \delta/2$ e $\epsilon\left(\sum_{n=0}^{N} 2^{-n}\right) < \delta/2$, da cui, con la disuguaglianza triangolare, possiamo costruire un elemento della base $\mathcal{A}$ contentente y tale che ...).*

(viii) Fissati $U_0, U_1, \ldots, U_N$ aperti di $[0,1]$, sia $y \in X$ tale che $y(n) \in U_n$ per ogni $n = 0, \ldots, N$. Mostrare che esiste $\epsilon > 0$ tale che per ogni $n = 0, \ldots, N$ si ha per $t \in [0,1]$

$$|t - y(n)| < 2^n \epsilon \implies t \in U_n.$$

Dedurre che l'intorno sferico in X con centro in y e raggio ϵ è contenuto nell'aperto

$$\Phi(U_0, U_1, \ldots, U_N) = \{x \in X : \forall n \in \{0, 1, \ldots, N\}, x(n) \in U_n\} \subset X.$$

(suggerimento si osservi che se $a_n \geq 0$ sono termini positivi o nulli allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} < \epsilon \implies \forall N, a_N < 2^N \epsilon$$

). Dedurre che X ha la topologia metrica indotta da d.