ESERCIZI

(2.1) Dimostrare che, se $A, B \subset X$ sono sottoinsiemi di uno spazio metrico:

(i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(ii) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

(2.2) Trovare i punti di accumulazione dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

(i) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n > 0\}$.

(ii) $\{\frac{k}{n} : k, n \in \mathbb{N}, n > 0\}$.

(iii) $\{\frac{k}{2^n} : k, n \in \mathbb{N}\}$ (razionali diadici positivi).

(iv) $\{\frac{1}{k} + \frac{1}{n} : k, n \in \mathbb{N}, k, n > 0\}$.

(2.3) Cercare di dimostrare le affermazioni contenute nell'esempio (3.3) a pagina 17. In particolare, quali sono i punti di accumulazione per la successione $\{\dfrac{1}{n}\}$ (per $n > 0$) nella retta reale $\mathbb{R}$ munita della metrica discreta $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$? La successione converge? In che senso?

****(2.4)** Quali sono i punti di accumulazione in $\mathbb{R}$ dell'insieme $X \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ costituito da tutti i numeri che si possono scrivere come somme

$$\sum_{j=1}^{l} \frac{1}{k_j}$$

per certi interi positivi tutti distinti $k_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, l$ (cioè tali che $i \neq j \implies k_i \neq k_j$)? google: egyptian fractions

***(2.5)** Dimostrare che se A e B sono sottoinsiemi di uno spazio metrico X allora

(i) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$;

(ii) $A \subseteq \overline{A}$;

(iii) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$;

(iv) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

Viceversa, si consideri un operatore $C \colon 2^X \to 2^X$ con le seguenti proprietà:

(i) $CA \cup CB = C(A \cup B)$;

(ii) $A \subseteq CA$;

(iii) $CCA = CA$;

(iv) $C\emptyset = \emptyset$.

Dimostrare che, definendo chiusi tutti i sottoinsiemi fissati dall'operatore C ($CA = A$) si ottiene una topologia su X (cioè valgono gli assiomi della definizione (4.1)). Questi assiomi alternativi si chiamano *assiomi di Kuratowski*).

(2.6) Dimostrare che se $A \subset B$, allora $\overline{A} \subset \overline{B}$.

***(2.7)** Dimostrare che uno spazio topologico con più di due punti con la topologia banale non è metrizzabile, mentre ogni spazio topologico discreto (con topologia discreta) è metrizzabile.

***(2.8)** Sia X uno spazio topologico e $C \subset X$ un suo sottoinsieme. Dimostrare che le seguenti proposizioni sono equivalenti.

(i) $X \smallsetminus C$ è aperto.

(ii) C contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

***(2.9)** Dimostrare che la chiusura $\overline{A}$ di un sottoinsieme $A \subset X$ di uno spazio topologico X è il più piccolo sottoinsieme chiuso di X che contiene A.

(2.10) Sia X un insieme e $Y \subset X$ un suo sottoinsieme. Dimostrare che se $\tau \subset 2^X$ è una topologia per X, allora $\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$ è una topologia per Y, e che l'inclusione $i \colon Y \to X$ è una funzione continua.

(2.11) Sia X un insieme di tre elementi $X = \{a, b, c\}$. Le seguenti sono topologie per X:

(i) $\{\{\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

(ii) $\{\{\}, \{a\}, \{a, b, c\}\}$.

(iii) $\{\{\}, \{a, b, c\}\}$.

Le seguenti *non* sono topologie

(i) $\{\{\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

(ii) $\{\{a\}, \{a, b, c\}\}$.

Quante topologie ci sono su X in tutto? Quanti sono i sottoinsiemi di 2^X?

***(2.12)** (Topologia dei complementi finiti) Sia X un insieme e $\tau \subset 2^X$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi A di X con complemento finito, cioè tali che $X \smallsetminus A$ ha un numero finito di elementi, unita all'insieme X (si vuole che $\emptyset$ sia aperto). Si dimostri che τ è una topologia.

(2.13) Consideriamo le seguenti famiglie di sottoinsiemi della retta reale $\mathbb{R}$.

(i) Tutti gli intervalli aperti: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.

(ii) Tutti gli intervalli semiaperti: $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (*Sorgenfrey line*).

(iii) Tutti gli intervalli del tipo: $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$.

(iv) Tutti gli intervalli del tipo: $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$.

Quali sono basi? Come sono relazionate le topologie che generano (Cioè quando le topologie sono contenute una nell'altra)?

(2.14) Dimostrare che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ è chiuso in $\mathbb{R}$ mentre l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$ è aperto in $\mathbb{R}$.

*** (2.15)** Sia $A \subset \mathbb{R}$ (con la metrica euclidea) un insieme e χ_A la funzione (detta *funzione caratteristica* di A) definita da

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A; \\ 0 & \text{se } x \notin A; \end{cases}$$

Esistono sottoinsiemi $A \subset X$ per cui esistono sempre punti di $\mathbb{R}$ in cui la funzione χ_A è continua? Esistono sottoinsiemi $A \subset \mathbb{R}$ per cui la funzione χ_A è continua ovunque? Esistono sottoinsiemi $A \subset \mathbb{R}$ per cui la funzione χ_A non è continua in nessun punto? E sottoinsiemi per cui la funzione χ_A è continua in un solo punto?

*** (2.16)** Quale topologia deve avere $\mathbb{R}$ affinché tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siano continue?

*** (2.17)** Dimostrare che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua se e solo se per ogni successione convergente $\{x_n\}$ (cioè per cui esiste $\bar{x}$ tale che $\lim_{n\to\infty} |x_n - \bar{x}| = 0$) vale l'uguaglianza

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(\bar{x})| = 0.$$

(2.18) Dimostrare che un insieme finito di punti di uno spazio metrico non ha punti limite (punti di accumulazione).