ESERCIZI

(1.1) Dimostrare che:

(i) L'insieme vuoto $\emptyset$ è unico.

(ii) per ogni insieme A, $\emptyset \subset A$.

(iii) per ogni insieme A, $A \subset A$.

(iv) per ogni insieme A, $A = A \cup \emptyset$.

(1.2) Dimostrare che se A, B, C e X sono insiemi arbitrari:

(i) $A \cup B = B \cup A$.

(ii) $A \cap B = B \cap A$.

(iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

(iv) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(v) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(vi) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(vii) Se $A \subset X$, allora $X \smallsetminus (X \smallsetminus A) = A$.

(viii) Se $A, B \subset X$, allora $X \smallsetminus (A \cup B) = (X \smallsetminus A) \cap (X \smallsetminus B)$.

(ix) Se $A, B \subset X$, allora $X \smallsetminus (A \cap B) = (X \smallsetminus A) \cup (X \smallsetminus B)$.

(1.3) Dimostrare che le seguenti proposizioni sono equivalenti:

(i) $A \subset B$;

(ii) $A \cap B = A$;

(iii) $A \cup B = B$.

(1.4) Costruire una bijezione tra l'insieme delle parti $2^X = \mathcal{P}(X)$ di un insieme X e l'insieme delle funzioni $f \colon X \to \{0, 1\}$.

***(1.5)** Siano A e B due insiemi e X l'insieme definito da $X = \{\{\{a\}, \{a, b\}\} : a \in A, b \in B\}$. Mostrare che $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{b\}, \{b, a\}\}$ se e solo se $a = b$ e costruire una bijezione $X \to A \times B$.

(1.6) Sia $f \colon X \to Y$ una funzione tra insiemi. Dimostrare che, se $A \subset X$ e $B \subset Y$ sono sottoinsiemi di X e Y:

(i) $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.

(ii) f è suriettiva se e solo se per ogni $B \subset Y$, $f f^{-1}(B) = B$.

(iii) $A \subset f^{-1}f(A)$.

✐**(1.7)** Sia $f\colon X \to Y$ una funzione tra insiemi, $A \subset X$ e $B \subset Y$ sottoinsiemi di X e Y. Dimostrare che:

$$f(A) \subset B \iff A \subset f^{-1}B.$$

(1.8) Provare a "dimostrare" il *principio di scambio*: se esiste $x \in \mathbb{U}$ tale che per ogni $y \in \mathbb{U}$ la proprietà $p(x,y)$ è vera, allora per ogni $y \in \mathbb{U}$ esiste $x \in \mathbb{U}$ tale che la proprietà $p(x,y)$ è vera:

$$(*) \qquad (\exists x : \forall y, p(x,y)) \implies (\forall y, \exists x : p(x,y)) \quad .$$

Usare $\mathbb{U} = \mathbb{R}$ e $p(x,y) :=$ "$x = y$" per mostrare che il viceversa non è vero.*

***(1.9)** Sia X un insieme e $f\colon X \times X \to \mathbb{R}$ una funzione tale che:

(i) $f(x,y) = 0$ se e solo se $x = y$.

(ii) $\forall x,y,z \in X, f(x,z) \leq f(x,y) + f(z,y)$.

Dimostrare che f è una metrica su X.

(1.10) Dimostrare che ogni intervallo aperto di $\mathbb{R}$ è intorno di ogni suo punto.

***(1.11)** Dimostrare che in uno spazio metrico ogni palla è intorno di ogni suo punto (cioè è un aperto).

(1.12) Dimostrare che l'unione di una famiglia qualsiasi di palle aperte di uno spazio metrico è un aperto.

***(1.13)** Sia $\{B_j\}_{j\in J}$ una famiglia di insiemi in Y e $f\colon X \to Y$ una funzione. Dimostrare che

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}B_j$$

(1.14) Quali tra questi sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ (con la metrica euclidea) sono aperti?

(i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(1,0)\}$.

(ii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(iii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$.

(iv) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq -1\}$.

---

* Osserviamo che la proprietà (*) ha per indeterminata la proprietà p: è quindi una proprietà delle proprietà. Dimostrare che è vera, vorrebbe dire più precisamente che (*) è vera *per ogni* p, cioè $\forall p, ((\exists x : \forall y, p(x,y)) \implies (\forall y, \exists x : p(x,y)))$. Ma è davvero possibile dimostrare una proposizione del genere?

(v) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \geq 1\}$.

* **(1.15)** È vero che l'intersezione di una famiglia qualsiasi di intorni aperti di $\mathbb{R}$ è un aperto? Se la famiglia è finita?

* **(1.16)** Dimostrare che, dato uno spazio metrico X e un punto $x_0 \in X$, la funzione $f(x) = d(x, x_0)$ è continua.

(1.17) Dimostrare che una metrica d e la metrica $2d$ sono equivalenti. Quali delle metriche dell'esempio (2.4) sono equivalenti?

✎ **(1.18)** Sia $X = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$ lo spazio metrico, con la metrica euclidea $d(x,y) = |x-y|$. Sia $Y = \mathbb{R}$ con la metrica euclidea. Dimostrare che ogni funzione $f\colon X \to Y$ è continua.

✎ **(1.19)** Sia $f\colon X = \mathbb{R} \to Y = \mathbb{R}$ (su $\mathbb{R}$ si consideri la metrica standard $|x-y|$) la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si ponga $x_0 = 0$. Si mostri che per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tale che*

$$x \in B_\epsilon(x_0) \implies f(x) \in B_\delta(f(x_0)).$$

Si mostri invece che non è vero che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tale che

$$x \in B_\delta(x_0) \implies f(x) \in B_\epsilon(f(x_0)).$$

Equivalentemente, si mostri che esiste $\epsilon > 0$ (per esempio, $\epsilon = 1/2$) tale che per ogni $\delta > 0$ esiste $x \in B_\delta(x_0)$ tale che $f(x) \notin B_\epsilon(f(x_0))$.

Dimostrare che la funzione f non è continua in x_0.

(1.20) Trovare gli errori inseriti nelle lezioni (valido anche nelle prossime lezioni).

*Suggerimento: si provi con $\delta > 2$.