Cognome: .... **Nome:** .... **Matricola:** ....

Risolvere in modo chiaro ed esauriente tutti gli esercizi (dimostrando tutto quello che si afferma).
Occorre che ogni esercizio venga svolto giustificando tutti i passaggi, argomentando e scrivendo le dimostrazioni in modo che siano allo stesso tempo corrette e comprensibili. Gli esercizi non vengono valutati soltanto per la correttezza, ma anche per il livello di chiarezza e di "stile" nella scrittura. Occorre sempre rileggere quello che si è scritto, e chiedersi se è comprensibile, se ciò che è scritto è giusto, se è contraddittorio, ambiguo, troppo convoluto, troppo denso di formule senza spiegazioni, oppure troppo pieno di spiegazioni senza formule...

Una buona idea potrebbe essere quella di far leggere il testo ad un compagno/a di corso, prima di consegnarlo. È una procedura molto diffusa, che si chiama peer-review (revisione tra pari). Può essere molto utile.

Gli elaborati possono essere consegnati in due modi: o caricando il file sulla piattaforma e-learning (modalità digitale: vengono accettati ***solo*** *file PDF, che siano fotocopie di manoscritti, oppure documenti preparati in LaTeX o analoghi), oppure consegnandoli nel luogo, data e ora sopra indicata (durante le esercitazioni).*

(1) Sia $f\colon X \to Y$ una funzione tra insiemi. Dimostrare che f è iniettiva se e soltanto se per tutti i sottoinsiemi $A, B \subseteq X$ si ha che $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$. Mostrare che $f\colon X \to Y$ è suriettiva se e soltanto se per ogni $C \subseteq Y$ si ha che $C \subseteq f(f^{-1}(C))$.

(2) Sia $f\colon X \to Y$ una funzione costante (cioè, esiste $y \in Y$ tale che per ogni $x \in X$ si ha che $f(x) = y$). Supponiamo che X e Y abbiano topologie tali che $A \subset Y$ è aperto in Y se e soltanto se la sua controimmagine $f^{-1}(A)$ è un aperto di X. Mostrare che Y ha necessariamente la topologia discreta.

(3) Per ogni $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ sia $X_n \subset \mathbb{R}$ l'insieme di numeri definito da

$$X_n = \{|a - b\pi| : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, a + b = n\}.$$

(a) Mostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il minimo di X_n esiste, $x_n = \min X_n$, ed è un numero $x_n \geq 0$; se $n > 0$, allora $x_n > 0$. Gli elementi dell'insieme $Y_n = \{a - b\pi : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, a + b = n\}$ sono in progressione aritmetica con ragione (differenza comune) uguale a $1 + \pi$.

(b) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un unico $y_n \in Y_n$ tale che $-\dfrac{1+\pi}{2} < y_n < \dfrac{1+\pi}{2}$; da ciò segue che $|y_n| = x_n$. Dedurre che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq \dfrac{1+\pi}{2}$. [1]

(c) Per il *principio dei cassetti* (principio del buco nella piccionaia, pigeonhole principle: qual è?), per ogni $\epsilon > 0$, esistono $h, k \in \mathbb{N}$ tali che $h > k$ e $|y_h - y_k| < \epsilon$.

(d) Siano ϵ, h e k come nel punto precedente, e $d = h - k > 0$. Siano a_h, b_h gli interi per cui $a_h + b_h = h$ e $y_h = a_h - b_h\pi$, e a_k, b_k i due interi per cui $a_k + b_k = k$ e $y_k = a_k - b_k\pi$. Quando $y_d = y_h - y_k$, se ϵ è abbastanza piccolo? È vero che per ogni $j \in \mathbb{N}$, $j > 0$, si ha $y_{jd} = jy_d$?

(e) Siano d e ϵ come sopra. Si consideri la sottosuccessione x_{jd}, per $j = 1, 2, \ldots, \infty$. Mostrare che esiste $j \in \mathbb{N}$ tale che $x_{jd} > \dfrac{1+\pi}{2} - \epsilon$. Dedurre che se $m \in \mathbb{R}$ è un numero tale che $(\forall n, x_n \leq m)$, allora $\dfrac{1+\pi}{2} \leq m$. [2]

[1](Cioè, che $\frac{1+\pi}{2}$ è un maggiorante per l'insieme di tutti gli x_n)
[2](Cioè, che $\frac{1+\pi}{2}$ è il minimo dei maggioranti per l'insieme di tutti gli x_n)