Note per il corso di Fondamenti di Matematica

Roberto Paoletti
Dipartimento di matematica e Applicazioni
Università di Milano Bicocca
Via Bicocca degli Arcimboldi,8
20126 Milano

roberto.paoletti@unimib.it

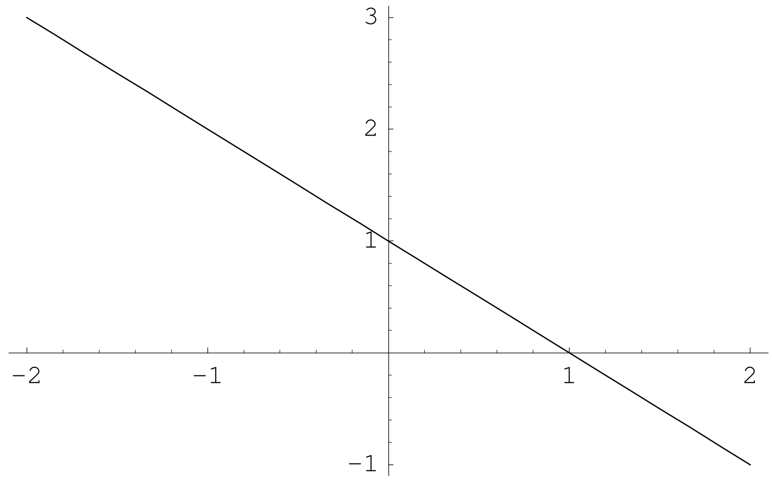
Rette nel Piano

Cosa è una retta nel piano?

Una retta ℓ nel piano xy è il luogo dei punti definito da un'equazione del tipo: αx+βy=γ, essendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli. Chiaramente, se $\lambda \neq 0$ l'equazione $\lambda\alpha$x+$\lambda\beta$y=$\lambda\gamma$ definisce lo stesso luogo dell'equazione αx+βy=γ. Quindi se $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ la scrittura:

$$\ell : \alpha \mathrm{x} + \beta \mathrm{y} = 0$$

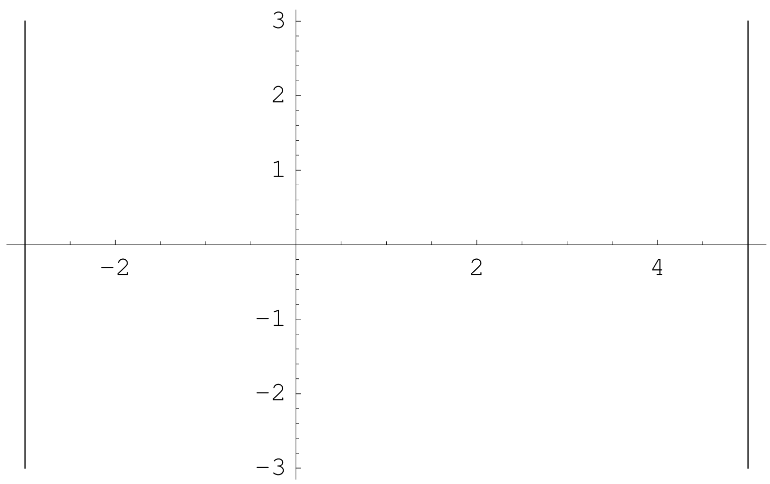
significa: un punto $(x_0,\ y_0)$ appartiene a ℓ se e solo se $\alpha \mathrm{x}_0 + \beta_0\ = \mu$. Ad esempio, se $\ell : x + y\ = 1$, allora $(1,\ 0),\ (0,\ 1),\ (0.5,\ 0.5),\ \left(\sqrt[2]{2},\ 1 - \sqrt[2]{2}\right) \in \ell$:



Diremo che (α, β, μ) è la terna dei coefficienti della retta ℓ. La terna dei coefficienti è quindi determinata da ℓ a meno di un multiplo scalare $\neq 0$.

- Esempio.

Se $\beta = 0$, e quindi $\alpha \neq 0$, possiamo riscrivere l'equazione della retta ℓ nella forma $x = -\frac{\gamma}{\alpha}$, ovvero ℓ è una retta verticale (parallela all' asse y). Ad esempio le rette $x = -3$ e $x = 5$ sono come in figura:



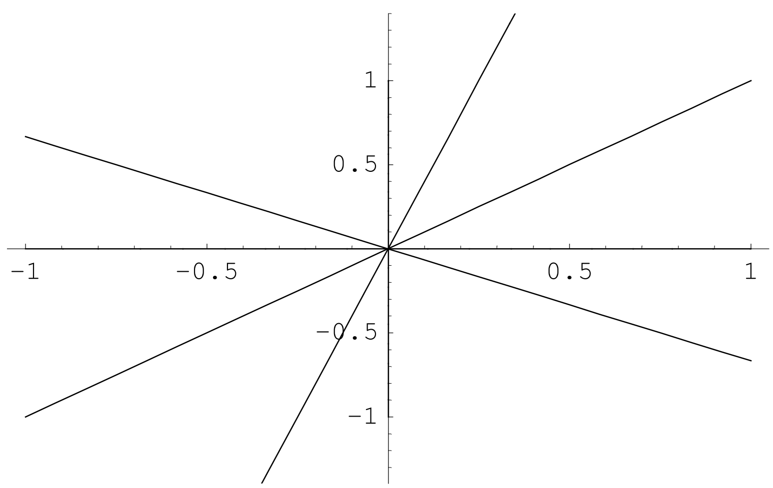
■ Osservazione

Una retta ℓ avente equazione $\alpha x + \beta y = \gamma$ passa per l'origine se e solo se $\gamma = 0$.

■ Esempio.

Le rette $2x + 3y = 0$, $4x - y = 0$, $y = 0$, $x = 0$, $x = y$ passano tutte per l'origine:

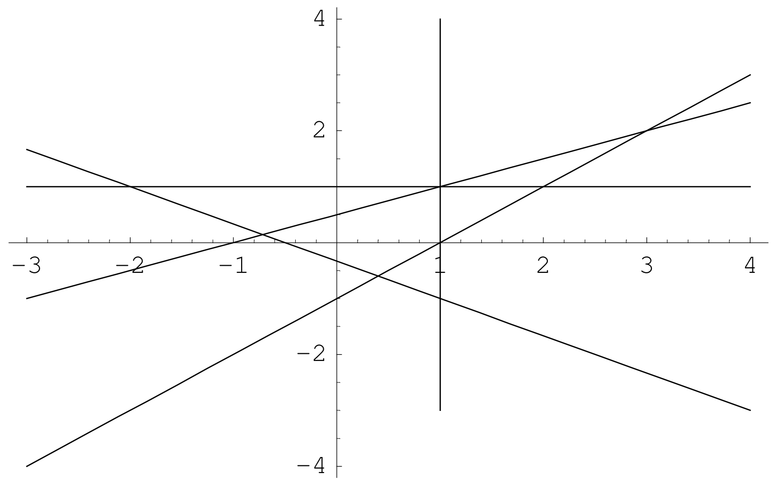
```
ParametricPlot[{{t, 0}, {0, t},
  {t, t}, {t, -2 / 3 t}, {t, 4 t}}, {t, -1, 1}]
```




```
-Graphics-
```

Invece le rette $\ell_1 : 2x + 3y = -1$, $\ell_2 : x - y = 1$, $\ell_3 : x - 2y = -1$, ℓ_4: y=1, ℓ_5: x=1 *non* passano per l'origine:

```
ParametricPlot[{{t, t / 2 + 1 / 2}, {1, t}, {t, t - 1},
  {t, -2 / 3 t - 1 / 3}, {t, 1}}, {t, -3, 4}]
```




```
-Graphics-
```

Possibili posizioni reciproche di due rette.

Date due rette ℓ: αx + βy =γ e k : δx + ζy = η nel piano Cartesiano, con $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ e $(\delta, \zeta) \neq (0, 0)$, vogliamo studiare le possibili posizioni reciproche di k e ℓ.

Definizione. Due rette ℓ, k nel piano si dicono *parallele* se sono uguali ovvero disgiunte. Si dicono *incidenti* se $\ell \neq k$ e $\ell \bigcap k \neq \phi$.

Innanzitutto, ℓ e k sono parallele se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $(\alpha, \beta) = \lambda(\delta, \zeta) = (\lambda\delta, \lambda\zeta)$. In tal caso necessariamente $\lambda \neq 0$.

Supponiamo infatti che esista un λ siffatto. Dopo avere moltiplicato l'equazione di k per il numero reale non nullo $\frac{1}{\lambda}$(e aver sostituito η con $\mu = \frac{\eta}{\lambda}$) possiamo supporre che k abbia equazione αx + βy = μ. Se un punto con coordinate (x_0, y_o) è nell'intersezione $\ell \bigcap k$, allora γ= αx$_0$ + βy$_0$=μ. Quindi, se $\gamma = \mu$ le due rette sono uguali (ovviamente), mentre se $\gamma \neq \mu$ allora le due rette sono disgiunte.

Supponiamo viceversa che non esista $\lambda \in \mathbb{R}$soddisfacente $(\alpha, \beta) = \lambda(\delta, \zeta)$. Il seguente è un facile esercizio:

Lemma.

Siano dati $\alpha, \beta, \delta, \zeta \in \mathbb{R}$. Allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\alpha = \lambda\delta$, $\beta = \lambda\zeta$ se e solo se $\alpha\zeta - \beta\delta = 0$.

Se quindi non esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\alpha = \lambda\delta$, $\beta = \lambda\zeta$, necessariamente deve essere $\alpha\zeta - \beta\delta \neq 0$. I punti nell'intersezione $\ell \cap k$ sono tutte e solo le soluzioni (x, y) del sistema lineare di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \mu \\ \delta x + \zeta y = \eta \end{cases}$$

Se $\alpha \neq 0$, dividiamo la prima equazione per α, moltiplichiamola per δ e sottraiamola alla seconda: otteniamo il nuovo sistema lineare:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \mu \\ \frac{\alpha\zeta-\delta\beta}{\alpha}\, y = \frac{\alpha\eta-\delta\mu}{\alpha} \end{cases}$$

con l'unica soluzione $x = \frac{\eta\zeta-\delta\mu}{\alpha\zeta-\delta\beta}$, $y = \frac{\alpha\eta-\delta\mu}{\alpha\zeta-\delta\beta}$. Analogamente si procede se $\beta \neq 0$, con la stessa (unica) soluzione. Quindi, riassumendo:

Lemma

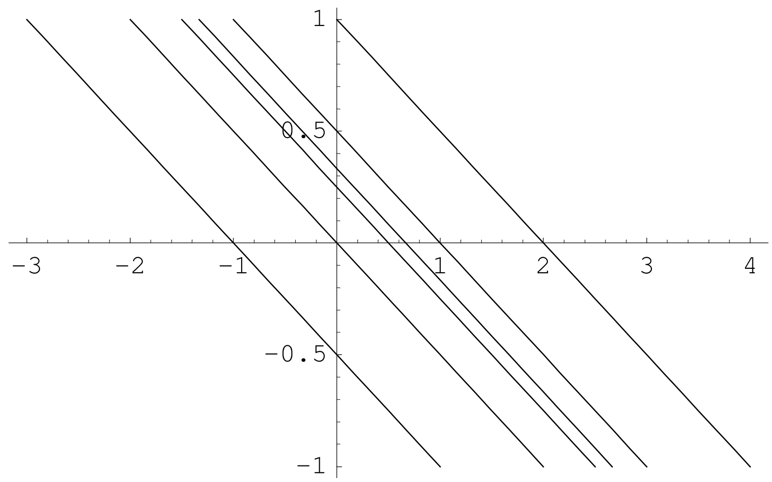
Date due rette nel piano Cartesiano, $\ell : \alpha x+\beta y=\mu$ e $k : \delta x + \zeta y = \eta$, queste sono parallele se e solo se $\alpha\zeta - \beta\delta = 0$. Se sono incidenti (e quindi $\alpha\zeta - \beta\delta \neq 0$), l'intersezione $\ell \cap k \neq \phi$ consiste dell'unico punto

$$\left(\frac{\eta\zeta-\delta\mu}{\alpha\zeta-\delta\beta}, \frac{\alpha\eta-\delta\mu}{\alpha\zeta-\delta\beta}\right).$$

Esempio.

La figura seguente riporta le rette $x + 2\,y = -1$, $x + 2\,y = 0$, $x + 2\,y = 1$, $x + 2\,y = 2$, $2\,x + 4\,y = 1$, $3\,x + 6\,y = 2$:

```
ParametricPlot[{{-2 t - 1, t},
  {-2 t , t}, {-2 t + 1, t}, {-2 t + 2, t},
  {-2 t + 1 / 2, t}, {-2 t + 2 / 3, t}}, {t, -1, 1}]
```



-Graphics-

- **Osservazione.**

Se $\gamma \neq \delta$, è ovvio che le rette αx+βy=γ e αx+βy=δ sono disgiunte, ovvero parallele.

La retta per due punti distinti.

Siano dati due punti distinti (x_0, y_0), (x_1, y_1) del piano. Vi è allora un' unica retta ℓ che li contiene entrambi. Infatti, l'equazione della generica retta nel piano è $\alpha x + \beta y = \mu$ e una retta di tale equazione contiene i due punti dati se e solo se i coefficienti α, β, μ sono una soluzione del sistema lineare di due equazioni in 3 incognite

$$\begin{cases} \alpha x_0 + \beta y_0 - \mu = 0 \\ \alpha x_1 + \beta y_1 - \mu = 0 \end{cases}$$

Usando il fatto che i punti sono distinti, e quindi che le stringhe di coefficienti $(x_0, y_0, -1)$ e $(x_1, y_1, -1)$ non sono proporzionali, si vede facilmente che le soluzioni del sistema sono tutte proporzionali a una data (α, β, μ) e che quindi esiste un'unica retta passante per i due punti dati.

Piú esplicitamente, una retta $\ell : \alpha x + \beta y = \mu$ contiene (x_0, y_0) se e solo se $\alpha x_0 + \beta y_0 = \mu$ e quindi l' equazione di ℓ puó essere riscritta $\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0$. La retta ℓ passa quindi per (x_1, y_1) se e solo se $\alpha(x_1 - x_0) + \beta(y_1 - y_0) = 0$. Ne segue che, a meno di un multiplo non nullo, possiamo supporre $\alpha = y_1 - y_0$, $\beta = x_0 - x_1$. Quindi dati due punti distinti $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ nel piano l'unica retta che li contiene entrambi ha equazione

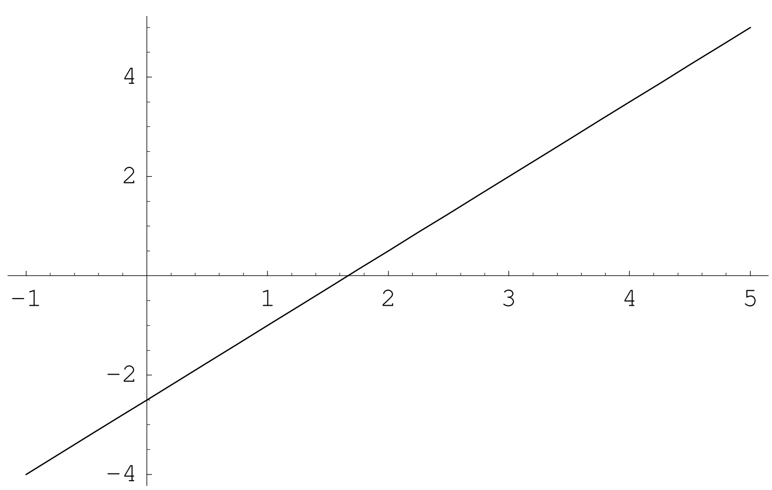
$$(y_1 - y_0)(x - x_0) + (x_0 - x_1)(y - y_0) = 0.$$

Esempi.

La retta passante per i punti $(1, -1)$ e $(3, 2)$ è

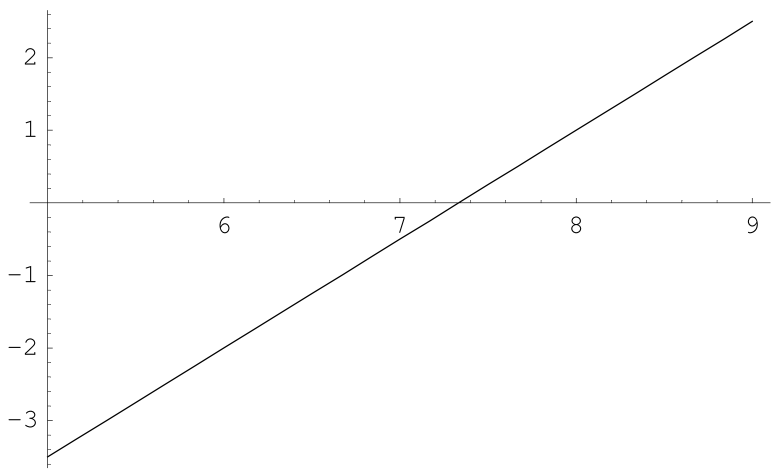
$\ell : (2 - (-1))(x - 1) + (1 - 3)(y - (-1)) = 0 =,$ ovvero

$\ell : 3x - 2y - 5 = 0$. Graficamente:



La retta passante per $(8, 1)$ e $(6, -2)$ è $\ell : (-2-1)(x-8)+(8-6)(y-1)=0$, ovvero $\ell : -3x+2y+22=0$. Graficamente:

```
ParametricPlot[{t, 3 / 2 t - 11}, {t, 5, 9}]
```

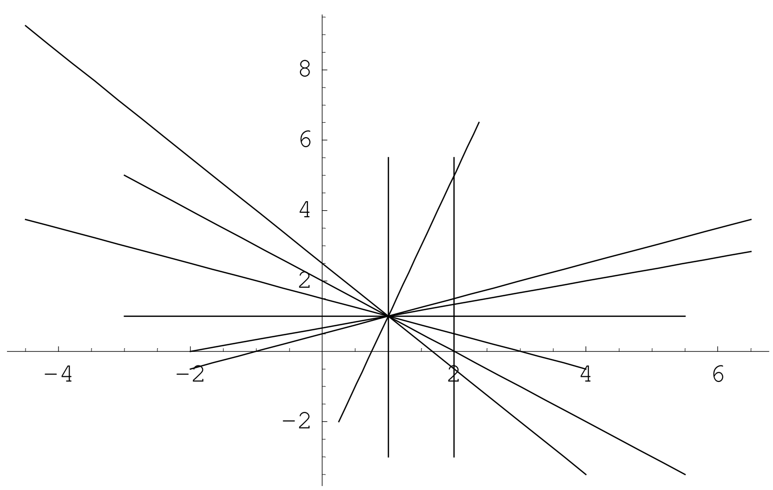



```
-Graphics-
```

Il fascio di rette per un punto

Come abbiamo visto, le rette passanti per un punto (x_0, y_0) sono tutte e sole quelle aventi equazione della forma $\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0$. Per ogni punto $(x_1, y_1) \neq (x_0, y_0)$, esiste una e una sola retta che passa per entrambi. La famiglia delle rette passanti per (x_0, y_0) si dice il fascio delle rette per (x_0, y_0), e verrà qui denotato $\mathcal{F}_{(x_0,y_0)}$. Sia ora k una retta nel piano non passante per (x_0, y_0), ad esempio la retta $x = x_0 + 1$. È chiaro che ogni retta $\ell \in \mathcal{F}_{(x_0,y_0)}$ (quindi passante per (x_0, y_0)), tranne la retta verticale $\ell_{\text{vert}} : x = x_0$, interseca la retta k esattamente in un punto, che denotiamo $g(\ell) \in k$. In questo modo risulta stabilita una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{F}_{(x_0,y_0)} \setminus \{\ell_{\text{vert}}\}$ e k.

```
ParametricPlot[
 {{t, -t + 2}, { t + 1 , t / 2 + 1}, {- t + 1, t / 2 + 1},
  {-t + 1, 3 / 2 t + 1}, { t + 1, t / 3 + 1}, {1, t},
  {t, 1}, {2, t}, {1 + t / 4, t + 1}}, {t, -3, 5.5}]
```

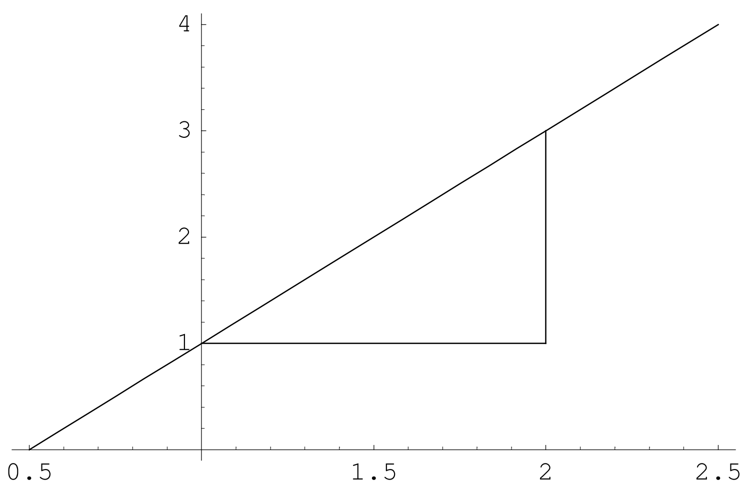


-Graphics-

Il coefficiente angolare di una retta.

Consideriamo una retta $\ell : \alpha x + \beta y = \mu$. Se ℓ non è verticale, ovvero se $\beta \neq 0$, possiamo dividere l'equazione per β e risolvere per y. L'equazione diviene $y = mx + r$, con $m = -\frac{\alpha}{\beta}$ e $r = \frac{\mu}{\beta}$. Il numero m si dice il *coefficiente angolare* della retta ℓ. L'equazione $y(x) = mx + r$ descrive y come una funzione di x. Quando x cambia di una quantità Δx, il valore di y cambia di una quantità $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = m\Delta x$. Quindi, il coefficiente angolare misura il rapporto tra la variazione di y corrispondente a una data variazione di x: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. In particolare m è la variazione di y quando x varia di 1. Per esempio, la retta in figura ha coefficiente angolare 2 e quindi se $\Delta x = 1$ si ha $\Delta y = 2$.

```
ParametricPlot[{{1 / 2 + 2 t, 0 + 4 t},
  { t + 1 , 1}, {2, 2 t + 1}}, {t, 0, 1}]
```



-Graphics-

- **Osservazione.**

Dato un punto del piano (x_0, y_0) e un numero reale $m \in \mathbb{R}$, l'unica retta passante per (x_0, y_0) e avente coefficiente angolare m è quella avente equazione $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Funzioni

Siano A e $\boldsymbol{B}$ due insiemi. Una funzione dall'insieme A nell'insieme B è una legge che **a ogni** elemento del primo insieme, $a \in A$, fa corrispondere **uno e un solo** elemento del secondo insieme. Una funzione quindi è specificata assegnando per ogni $a \in A$ l'unico $b \in B$ che gli corrisponde. Generalmente una funzione viene indicata con una scrittura del tipo $f : A \to B$, che si legge: f è una funzione da A in B. Si incontra spesso anche la notazione $A \overset{f}{\to} B$. L'insieme A dice il *dominio* della funzione, l'insieme B il *codominio*. Per ogni $a \in A$, diremo che $f(a) \in B$ è il trasformato di a, o l'immagine di a, mediante f.

- **Esempio.**

Se A, B sono insiemi e $b \in B$ è un elemento fissato di B, la funzione $A \overset{f}{\to} B$ costante uguale a B è quella definita ponendo $f(a) = b \;\forall\; a \in A$.

- **Esempio.**

Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi. Possiamo definire tre funzioni distinte $f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ponendo $f(m) = m \;\forall\; m \in \mathbb{Z}$, $g(m) = -m \;\forall\; m \in \mathbb{Z}$ e infine $h(m) = -m \;\forall\; m \leqslant 0$, $h(m) = m \;\forall\; m > 0$.

■ **Esempio.**

Siano $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali, $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi, $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali, $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali. Le funzioni $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f_3 : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f_4 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite ponendo $f_i(x) = 2x$ sono tutte ben definite e tutte diverse tra loro, perché differiscono per il dominio o per il codominio.

■ **Definizione.**

Una funzione $f : A \to B$ si dice iniettiva se $a, a' \in A$, $f(a) = f(a')$ implica $a = a'$. In altri termini, f è iniettiva se non vi sono elementi distinti di A che hanno la stessa immagine mediante f. Equivalentemente ancora, f è iniettiva se per ogni $b \in B$ esiste al piú un $a \in A$ tale che $f(a) = b$.

■ **Esempio.**

La funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ data da $f(n) = n^2$ non è iniettiva, poiché $f(n) = f(-n)\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$. La funzione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ data da $g(n) = n^2$ è iniettiva. La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R}$ data da $h(x) = \sqrt{|x|}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ non è iniettiva, poichè $h(x) = h(-x)$. La funzione $\mathbb{Q} \xrightarrow{k} \mathbb{R}$ data da $k(x) = x\sqrt{|x|}$ è iniettiva.

■ **Esempio.**

Siano A l'insieme dei mesi dell'anno, B l'insieme delle lettere dell'alfabeto, $A \xrightarrow{f} B$ la funzione che a ogni mese associa la rispettiva iniziale. Allora f non è iniettiva, poichè mappa l'elemento agosto $\in A$ e l'elemento aprile $\in A$ nello stesso elemento di B, la lettera a.

- **Definizione.**

Una funzione $A \xrightarrow{f} B$ si dice suriettiva se per ogni $b \in B$ esiste almeno un $a \in A$ tale che $f(a) = b$. Quindi f è suriettiva se ogni $b \in B$ è immagine di qualche elemento di A .

- **Esempi.**

La funzione $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ data da $f(n) = 2\,n$ $(n \in \mathbb{N})$ non è suriettiva, poichè non esiste un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che $2\,n = 1$.
La funzione $\mathbb{Q} \xrightarrow{g} \mathbb{Q}$ data da $g(r) = 2\,r$ $(r \in \mathbb{Q})$ è invece suriettiva, poichè per ogni $r \in \mathbb{Q}$ si ha $\frac{r}{2} \in \mathbb{Q}$ e $f(\frac{r}{2}) = r$.
Se A è come sopra l'insieme dei mesi dell'anno, B l'insieme delle lettere dell'alfabeto, $A \xrightarrow{f} B$ la funzione che a ogni mese associa la rispettiva iniziale, allora f non è suriettiva, poichè per esempio nessun elemento $a \in A$ soddisfa $f(a) = z$ (non esiste un mese la cui iniziale è la lettera z).
La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R}$ data da $h(x) = x^2$ non è suriettiva, poichè se $x < 0$ allora non esiste $y \in \mathbb{R}$ tale che $x = y^2 = f(y)$.
Sia $\mathbb{R}_{\geq 0} \subset \mathbb{R}$l'insieme dei numeri reali non negativi. La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{k} \mathbb{R}_{\geq 0}$ data da $k(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ è suriettiva, dato che se $x \geqslant 0$ allora esiste una radice quadrata reale $\sqrt{x}$ di x, ovvero $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tale che $x = y^2 = k(y)$. La funzione k non è iniettiva, dato che $k(y) = k(-y)\ \forall\ y \in \mathbb{R}$.

Grafi di Funzioni.

Sia $A \xrightarrow{f} B$ una funzione. Il grafo di f è il sottoinsieme del prodotto Cartesiano $A \times B$ dato da

$$\text{grafo}\,(f) = \{(a,\ f(a)) :\ a \in A\}.$$

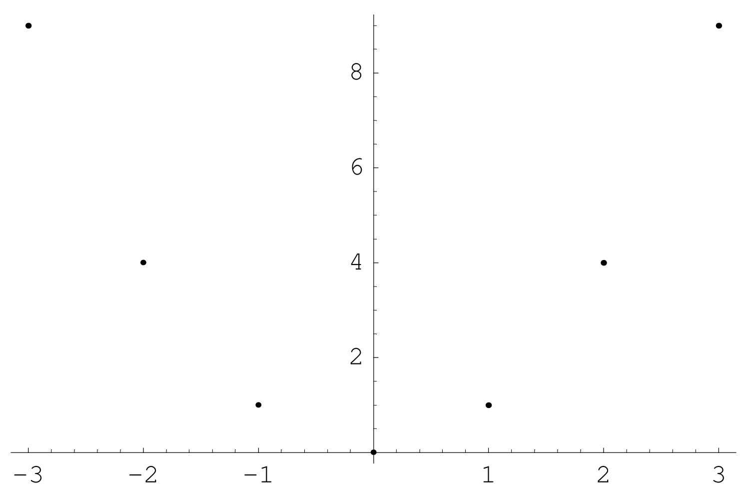
■ Esempio: il grafo di $f(x) = \text{ax} + b$.

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ numeri reali fissati. Definiamo $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ ponendo $f(x) = \text{ax} + b$ $(x \in \mathbb{R})$. Il grafo di f è il sottoinsieme del piano Cartesiano costituito dalle coppie (x, y) con $y = \text{ax} + b$, ovvero il luogo $\ell : \text{ax} - y + b = 0$. In altri termini, il grafo di f è la retta ℓ avente coefficiente angolare m e passante per il punto $(0, b)$.

■ Esempio: il grafo di $f(n) = n^2$ (n intero).

Sia $\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$ la funzione $f(n) = n^2$ $(n \in \mathbb{Z})$. Allora il grafo di f è l'insieme delle coppie ordinate di numeri interi della forma (n, n^2), $n \in \mathbb{Z}$. Ad esempio, la porzione del grafo di f giacente sopra l'intervallo $[-3, 3]$ è la seguente:

```
ListPlot[{{-3, 9}, {-2, 4},
  {-1, 1}, {0, 0}, {1, 1}, {2, 4}, {3, 9}}]
```

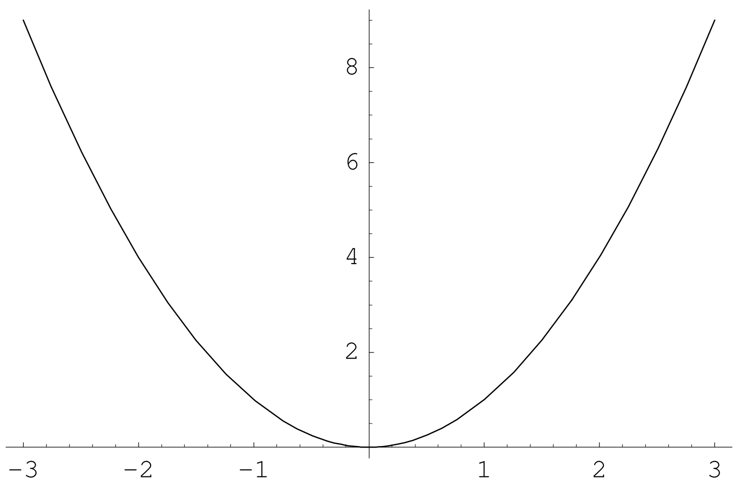


-Graphics-

- **Esempio: il grafo di $f(x) = x^2$ (x reale).**

Sia $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x^2$ ($x \in \mathbb{R}$). Allora $\text{grafo}(f) = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$. Si noti che $f(x) = f(-x)$, e quindi una coppia $(x.y) \in$ grafo(f) se e solo se (-x.y) $\in$ grafo(f). Quindi, il grafo di f è simmetrico rispetto alla riflessione $(x, y) \mapsto (-x, y)$, ovvero come si dice usualmente è simmetrico rispetto all'asse y. Graficamente, la porzione di tale grafo giacente sopra l'intervallo $[-3, 3]$ si ottiene 'interpolando' il grafo dell'esempio precedente:

```
ParametricPlot[{t, t^2}, {t, -3, 3}]
```



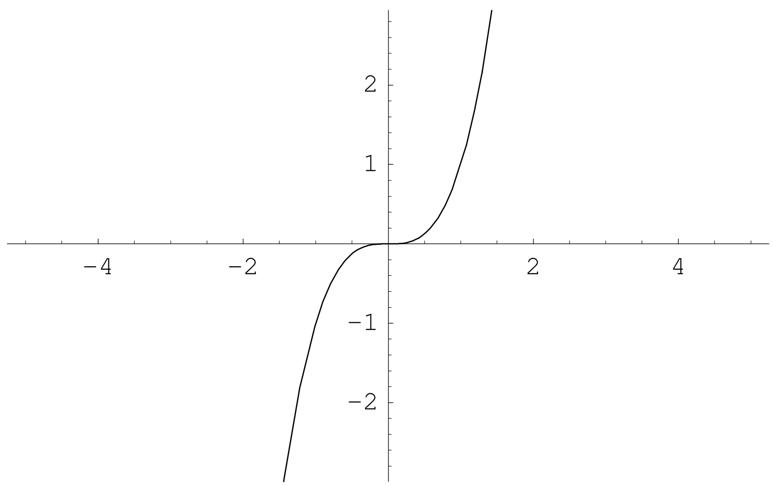

```
-Graphics-
```

Si noti che $f(x) = x^2$ diventa arbitrariamente grande quando x assume valori positivi o negativi sempre piú grandi. Scriveremo $\lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty$.

■ Esempio: il grafo di $f(x) = x^3$.

Consideriamo ora la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^3$. Si ha ora $f(-x) = -f(x)$, quindi una coppia (x, y) appartiene al grafo di f se e solo se la coppia $(-x, -y)$ appartiene al grafo di f. In altri termini, il grafo di f è simmetrico rispetto alla riflessione $(x, y) \mapsto (-x, -y)$, ossia, come si dice abitualmente, è simmetrico rispetto all'origine. Per ottenere il grafo possiamo aiutarci segnando sul piano alcuni punti corrispondenti a $x = n$ con n intero, ad esempio $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$, $(2, 8)$, (-2,-8), (3,27), (-3,-27) e quindi 'interpolando' tali punti.

```
ParametricPlot[{t, t^3}, {t, -5, 5}]
```



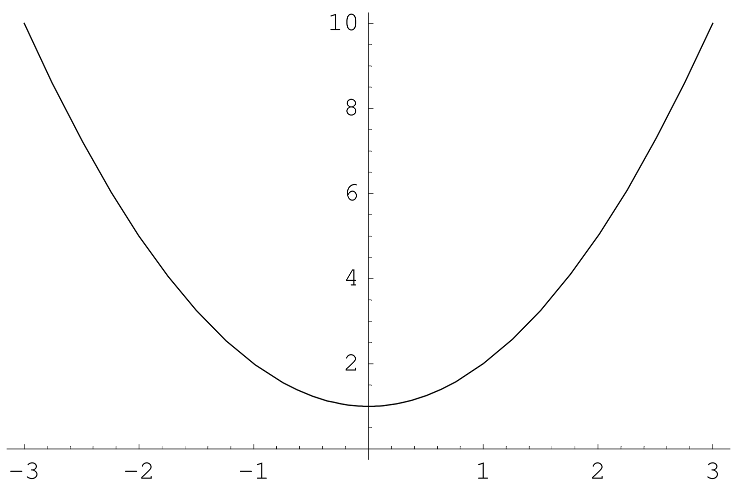

```
-Graphics-
```

Si noti che $f(x) = x^3$ diventa arbitrariamente grande positiva quando x assume valori positivi sempre piú grandi e diventa arbitrariamente grande negativa quando x assume valori negativi sempre piú grandi. Scriveremo $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

Definizione: funzioni pari e dispari.

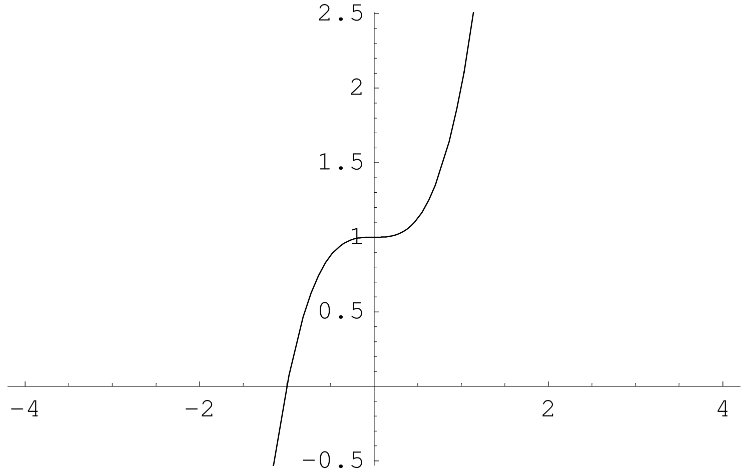
Sia data una funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. Diremo che f è pari se $f(x) = f(-x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Diremo che f è dispari se $f(-x) = -f(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Ad esempio, $f(x) = x^2$ è pari, mentre $f(x) = x^3$ è dispari. Più in generale, $f(x) = x^{2n}$ è pari per ogni intero $n \geq 0$, mentre $f(x) = x^{2n+1}$ è dispari per ogni intero $n \geq 0$. Una funzione dispari soddisfa $f(0) = f(-0) = -f(0)$ e pertanto se f è dispari allora necessariamente $f(0) = 0$: il grafo di una funzione dispari passa necessariamente per l'origine $(0, 0)$ del piano Cartesiano. Non cosí il grafo di una funzione pari: ad esempio, $f(x) = x^2 + 1$ è pari e $f(0) = 1$. Invece, $f(x) = x^3 + 1$ non è dispari (e neanche pari). Chiaramente, una funzione costante è sempre pari.

ParametricPlot[{t, t^2 + 1}, {t, -3, 3}]



-Graphics-

```
ParametricPlot[{t, t^3 + 1}, {t, -4, 4}]
```

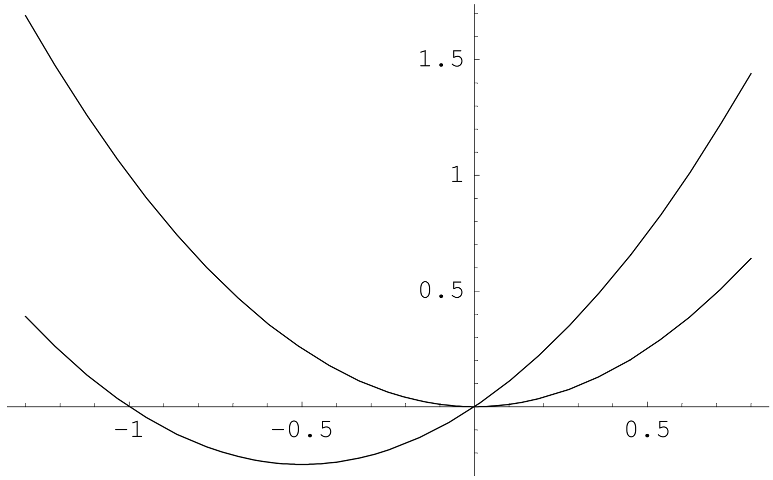


-Graphics-

- **Esempio: il grafo di $f(x) = x^2 + x$.**

La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2 + x$ non è né pari né dipari. Ad esempio, $f(1) = 2$ ma $f(-1) = 0$. Quindi il grafo di f non ha particolari simmetrie rispetto agli assi coordinati (ma è simmetrico rispetto all'asse $x = -0.5$). Abbiamo $f(0) = 0$, quindi il grafo passa per l'origine. Raccogliendo, $f(x) = x(x+1)$ e quindi $f(0) = 0$ se e solo se $x = 0, -1$. Avremo $f(x) > 0$ se $x < -1$ o $x > 0$, $f(x) < 0$ se $-1 < x < 0$. Se $x > 0$, abbiamo $f(x) > x^2$. Poichè x^2 diventa arbitrariamente grande per $x \longrightarrow +\infty$, abbiamo che anche $f(x)$ diventa arbitrariamente grande per $x \longrightarrow +\infty$, cioè $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Per $x < 0$, abbiamo $f(x) < x^2$, ma il termine quadratico x^2 domina sul termine lineare x e quindi si ha ancora $\lim_{x \to \infty} (x^2 + x) = \lim_{x \to \infty} x^2 = +\infty$. La figura seguente mette a confronto i grafi di x^2 e $x^2 + x$.

```
ParametricPlot[
 {{t, t^2 + t}, {t, t^2}}, {t, -1.3, 0.8}]
```



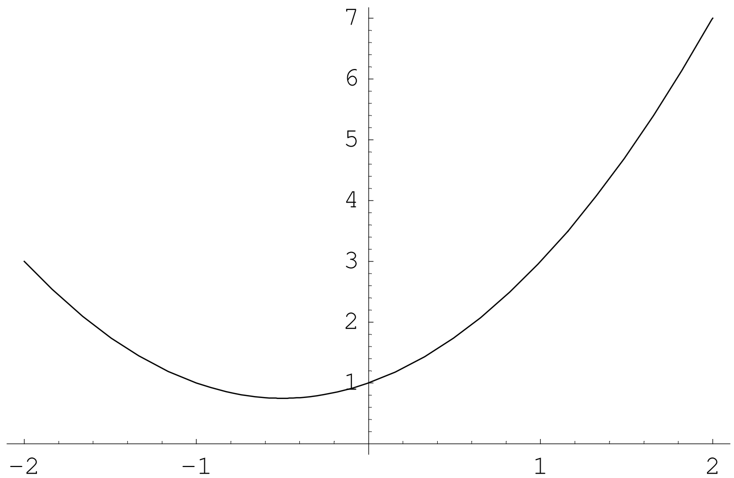
-Graphics-

Si noti che $x^2 + x = [x^2 + 2\,\frac{x}{2} + \frac{1}{4}] - \frac{1}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$. Quindi il grafo di $x^2 + x$ si ottiene dal grafo di x^2 traslandolo orizzontalmente di $-\frac{1}{2}$ e verticalmente di $-\frac{1}{4}$. In particolare, tale grafo è simmetrico rispetto alla retta $x = -\frac{1}{2}$.

- **Esempio: il grafo di $f(x) = x^2 + x + 1$.**

Il grafo di $f(x) = x^2 + x + 1$ si ottiene dal grafo di $f(x) = x^2 + x$ traslandolo verso l'alto di 1:

```
ParametricPlot[{t, t^2 + t + 1}, {t, -2, 2}]
```

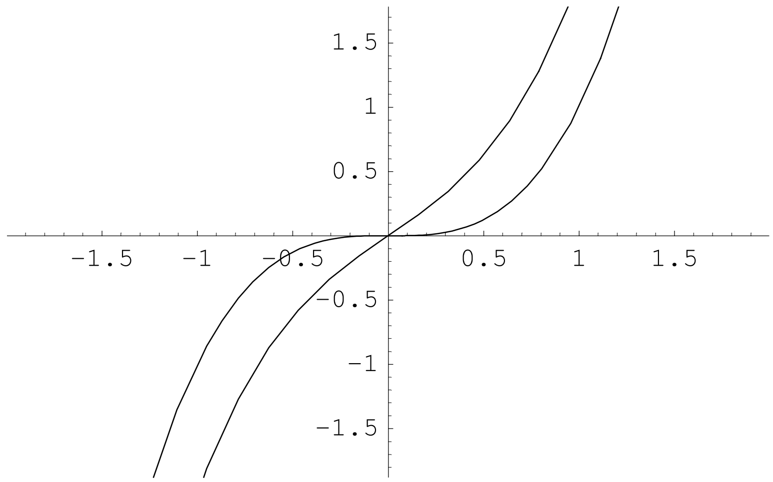


-Graphics-

- **Esempio: il grafo di $f(x) = x^3 + x$.**

  La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^3 + x$ è dispari, pertanto il suo grafo è simmetrico rispetto all'origine. Si ha $f(x) > x^3$ se $x > 0$. Poichè x^3 diventa arbitrariamente grande per $x \longrightarrow +\infty$, abbiamo che anche $f(x)$ diventa arbitrariamente grande per $x \longrightarrow +\infty$, cioè $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Per $x < 0$, abbiamo $f(x) < x^3$; poiché x^3 diventa arbitrariamente grande negativo, lo stesso vale allora per $f(x)$. Quindi si ha ancora $\lim_{x \to \infty} (x^3 + x) = \lim_{x \to \infty} x^3 = -\infty$. La seguente figura mette a confronto x^3 e $x^3 + x$.

```
ParametricPlot[
 {{t, t^3 + t}, {t, t^3}}, {t, -1.9, 1.9}]
```



-Graphics-

Il grafo di $f(x) = x^n$.

Sia $n \geqslant 0$ un intero. La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^n$ $(x \in \mathbb{R})$ è pari se n è pari, dispari se n è dispari. Pertanto, il suo grafico è completamente determinato noto il suo comportamente per $x \geqslant 0$. La porzione del grafico per $x \leqslant 0$ si ottiene dalla porzione per $x \geqslant 0$ per simmetria (riflessione) rispetto all'asse y $((x, y) \mapsto (-x, y))$ quando n è pari, per simmetria (riflessione) rispetto all'origine $((x, y) \mapsto (-x, -y))$ quando n è dispari. Si osservi che per $x \geqslant 0$, la funzione f è strettamente crescente. Infatti, data l'uguaglianza:

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2} y + x^{n-3} y^2 \cdots + \mathrm{xy}^{n-2} + y^{n-1})$$

ricaviamo che $x^n > y^n$ se $x > y > 0$ (entrambi i fattori a secondo membro essendo positivi). Quindi il grafico di f per $x \geqslant 0$ è sempre in salita, ovvero non presenta *saliscendi*. Inoltre, dato un qualsiasi numero reale $\lambda > 0$, si ha $x^n > \lambda$ se $x > \sqrt[n]{\lambda}$. Quindi per $x > \sqrt[n]{\lambda}$ il grafo di f è al di sopra della retta orizzontale $y = \lambda$. Pertanto,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

e per simmetria quindi $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ se n è pari, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ se n è dispari. Per una migliore comprensione del grafo di f dobbiamo aspettare l'introduzione delle derivate. Già adesso, possiamo fare la seguente importante osservazione: il fatto che $f(0) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e il grafo di f è sempre in salita è la manifestazione grafica del fatto ben noto che per ogni numero reale $\lambda \geqslant 0$

esiste ed è unico un numero reale $x \geqslant 0$ tale che $x^n = \lambda$. Tale x si dice la radice n-ima di λ, e si denota generalmente $\sqrt[n]{\lambda}$.

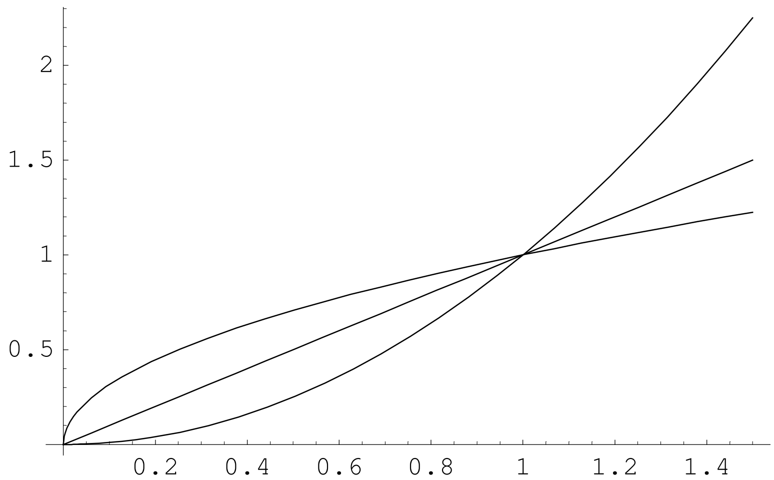
■ Il grafo di $f(x) = \sqrt[n]{x}$.

Abbiamo appena ricordato il fatto che per per ogni numero reale $\lambda \geqslant 0$ esiste ed è unico un numero reale $\sqrt[n]{\lambda} \geqslant 0$ tale che $\left(\sqrt[n]{\lambda}\right)^n = \lambda$. In altri termini, la funzione $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ data da $f(x) = x^n$ è biunivoca, con inversa la funzione $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ data da $g(x) = \sqrt[n]{x}$. Ne segue facilmente che il grafico di g si ottiene dal grafico di f per riflessione rispetto alla retta $y = x$ (bisettrice del primo quadrante). Infatti,

$$\begin{aligned}&\mathrm{gr}(f) = \{(x, x^n) : x \in [0, +\infty)\} = \\ &\qquad \left\{\left(\sqrt[n]{x^n}, x^n\right) : x \in [0, +\infty)\right\} = \left\{\left(\sqrt[n]{y}, y\right) : y \in [0, +\infty)\right\}\end{aligned}$$

avendo fatto la sostituzione $y = x^n$. Quest'ultimo luogo è ovviamente l'immagine del grafo di g per la riflessione rispetto alla retta $y = x$, data da $(x, y) \mapsto (y, x)$. La figura seguente riporta il grafo di $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$:

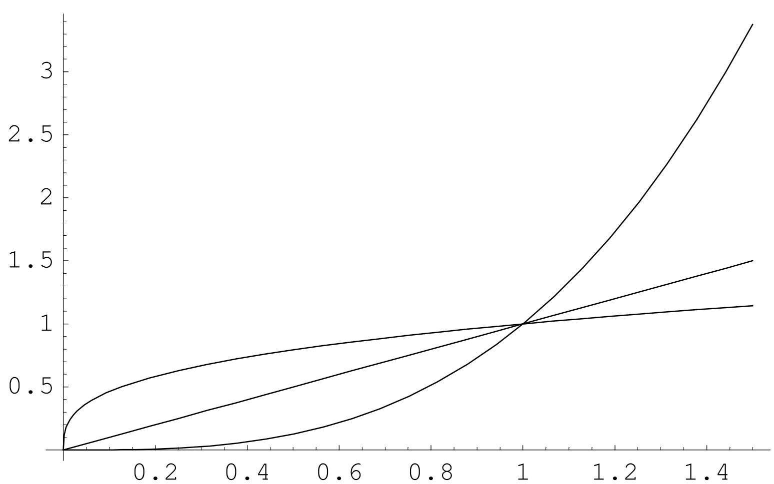
```
ParametricPlot[
 {{t, t}, {t, t^2}, {t, √t}}, {t, 0, 1.5}]
```




```
-Graphics-
```

La figura seguente riporta il grafo di $f(x) = x^3$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$:

```
ParametricPlot[
 {{t, t}, {t, t^3}, {t, ∛t}}, {t, 0, 1.5}]
```




```
-Graphics-
```

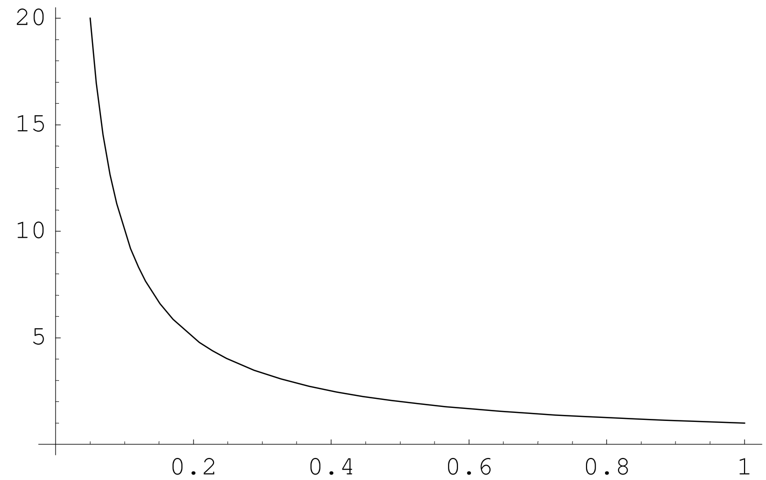
Funzioni razionali

Una funzione razionale è una funzione della forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, ove P, Q sono polinomi. Quindi il dominio di f è il complementare in $\mathbb{R}$ dell'insieme delle radici di Q. Denotiamo tale insieme con $\text{rad}(Q) = \{t \in \mathbb{R} : Q(t) = 0\}$. Si noti che $\text{rad}(Q)$ è un insieme finito, avente cardinalitá al più uguale al grado di Q (per il teorema di Ruffini). Pertanto vedremo f come una funzione $f : \text{rad}(Q)^c \to \mathbb{R}$. Ci interessiamo qui al comportamento di f agli estremi del dominio (quindi per x che tende a $\pm\infty$, oppure a una radice di Q da destra o sinistra).

■ Il grafo di $f(x) = \frac{1}{x}$.

In questo caso abbiamo $P = 1$ (polinomio costante) e $Q(x) = x$. Quindi Q ha l'unica radice $x = 0$. Pertanto, vedremo f come una funzione $f : (-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty) \to (-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$, data da $f(x) = \frac{1}{x}$. Tale funzione è dispari, quindi il grafo è daterminato dal comportamento per $x \geq 0$. La parte del grafo per $x \leq 0$ si ottiene da quella per $x \geq 0$ per riflessione rispetto all'origine. Chiaramente, si ha $f(x) > 0$ se $x > 0$; inoltre, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Inoltre, se $0 < x < y$, dividendo per $\text{xy} > 0$ otteniamo $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$. Quindi, la funzione f è strettamente decrescente per $x > 0$. Il grafo di f al di sopra di $(0, +\infty)$, pertanto, è sempre in discesa.

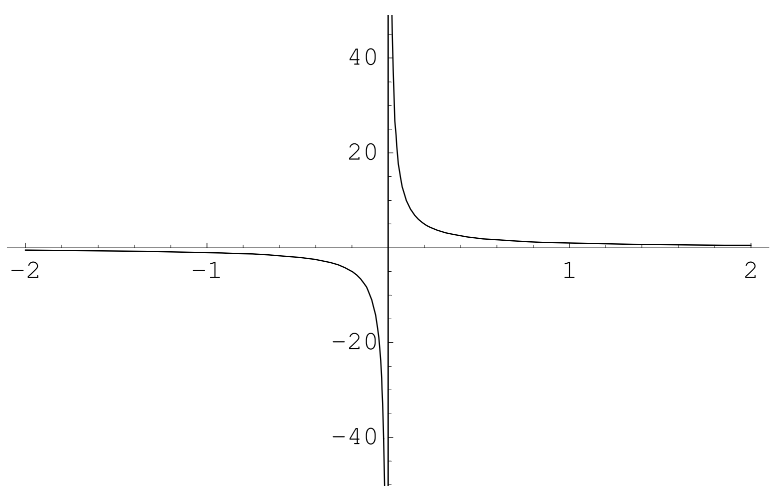
```
ParametricPlot[{t, 1 / t}, {t, 0.05, 1}]
```




```
-Graphics-
```

Per riflessione rispetto all'origine, otteniamo il grafo su tutto $(-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$:

```
ParametricPlot[{t, 1 / t}, {t, -2, 2}]
```

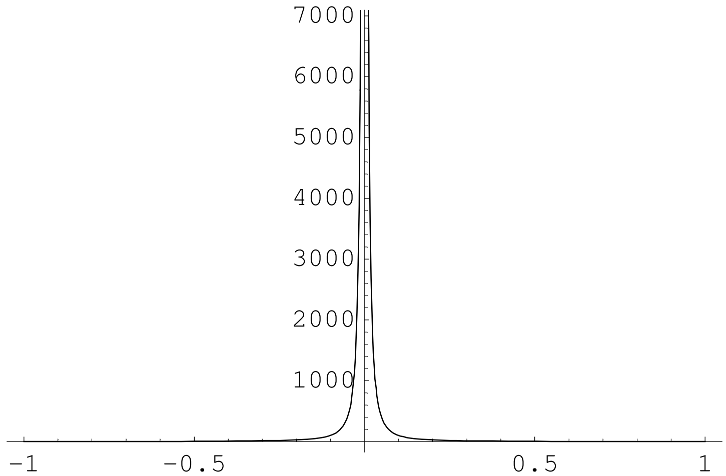



```
-Graphics-
```

▪ Il grafo di $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

L'analisi è la stessa di prima, eccetto che ora abbiamo simmetria rispetto all'asse y perchè la funzione è pari.

```
ParametricPlot[{t, 1 / t^2}, {t, -1, 1}]
```




```
-Graphics-
```

■ Esempio: il grafico di $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$.

In questo caso, $P(x) = x^2$, $Q(x) = x^2 - 1$. Le radici di $Q(x)$ sono ± 1, pertanto il dominio di f è $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Otteniamo così una funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{R}$. Chiaramente, la funzione è pari, e pertanto il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y. Consieriamo i limiti all'infinito. Per simmetria, il limite è lo stesso per $x \to \pm\infty$. Si ha

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$

Quindi, per x molto grande negativo o positivo il grafo di $f(x)$ si avvicina sempre più alla retta orizzontale $y = 1$.

Chiaramente, l'unico punto del dominio nel quale f si annulla è $x = 0$. Inoltre, abbiamo $x^2 > x^2 - 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Pertanto, se $x \notin [-1, 1]$, e quindi $x^2 - 1 > 0$, dividendo tale disuguaglianza per $x^2 - 1$ otteniamo $\frac{x^2}{x^2-1} > 1$; quindi $f(x) > 1$ se $x \in (-\infty, -1) \bigcup (1, +\infty)$. Pertanto la porzione del grafo di $f(x)$ che giace sopra $(-\infty, -1) \bigcup (1, +\infty)$ si trova al di sopra della retta orizzontale $y = 1$. Se invece $x \in (-1, 1)$, allora $x^2 - 1 < 0$ e dividendo per $x^2 - 1 < 0$ il verso della diseguaglianza si inverte. Quindi se $x \in (-1, 1)$ allora $\frac{x^2}{x^2-1} < 1$. Quindi la porzione del grafo di $f(x)$ che giace sopra $(-1, 1)$ si trova al di sotto della retta orizzontale $y = 1$.

Quando x si avvicina a 1 da sinistra, possiamo fare la sostituzione $x = 1 - \delta$, con $\delta > 0$ molto piccolo (tendente a zero da destra). Quindi, possiamo scrivere $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) = -\delta(2 - \delta)$, $x^2 = 1 - 2\delta + \delta^2$. Quindi,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1-2\delta+\delta^2}{-\delta(2-\delta)} = -\frac{1}{2} \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{\delta} = -\infty$$

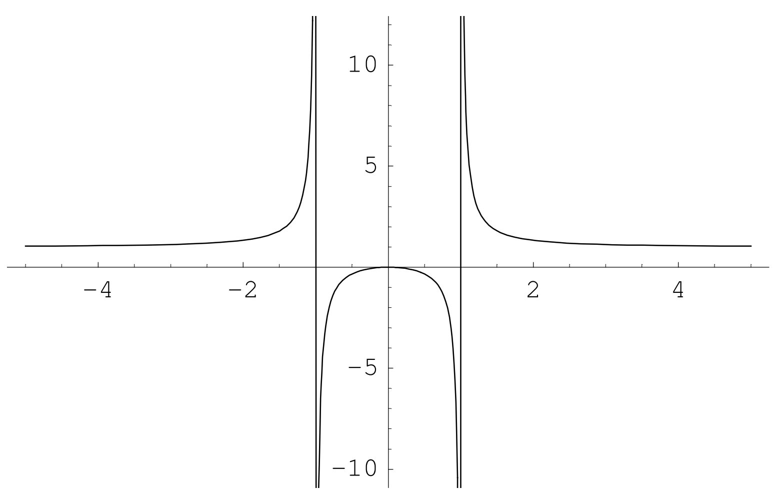
Quando x tende a 1 da destra, possiamo fare la sostituzione $x = 1 + \delta$, con $\delta > 0$ molto piccolo (tendente a zero da sinistra). Quindi $x^2 = 1 + 2\,\delta + \delta^2$, $x^2 - 1 = (x - 1)\,(x + 1) = \delta(2 + \delta)$ e pertanto

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1+2\,\delta+\delta^2}{\delta(2+\delta)} = \frac{1}{2} \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{\delta} = +\infty.$$

I limiti per $x \to -1^\pm$ si ottengono da quelli per $x \to -1^\pm$ per simmetria.

Non avendo ancora introdotto le derivate, non possiamo ancora trarre conclusioni sulla crescenza di f, a meno di fare qualche manipolazione algebrica. Rimandiamo però tali considerazioni. La figura seguente rappresenta la parte del grafico della funzione sull'intervallo $[-5, 5]$.

$$\texttt{ParametricPlot}\left[\left\{\texttt{t},\ \frac{\texttt{t}^2}{\texttt{t}^2-1}\right\},\ \{\texttt{t},\ \texttt{-5},\ \texttt{5}\}\right]$$




```
-Graphics-
```

■ Esempio : il grafico di $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

In questo caso, $P(x) = x$, $Q(x) = x^2 - 1$. Il dominio di f è quindi ancora $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, ovvero $f : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{R}$. Chiaramente, la funzione è dispari, e pertanto il suo grafico è ora simmetrico rispetto all'origine, cioè invariante per la riflessione $(x, y) \mapsto (-x, -y)$. Consieriamo i limiti all'infinito. Per simmetria, il limite per $x \to -\infty$ è l'*opposto* di quello per $x \to +\infty$. Si ha
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.
Lo stesso vale pertanto per $x \to -\infty$.
Quindi, per x molto grande negativo o positivo il grafo di $f(x)$ si avvicina sempre più alla retta orizzontale $y = 0$.
Chiaramente, l'unico punto del dominio nel quale f si annulla è $x = 0$. Analizziamo il segno di f. Se $x \notin [-1, 1]$, e quindi $x^2 - 1 > 0$, il denumeratore è positivo e quindi il<segno di f è quello di x; quindi $f(x) > 0$ se $x \in (1, +\infty)$, $f < 0$ se $x \in (-\infty, 1)$. Se invece $-1 < x < 1$, ovvero $x \in (-1, 1)$, allora il< denumeratore di f è negativo, e pertanto il segno di f è l'opposto del segno di x. Quindi, $f > 0$ se $x \in (-1, 0)$, mentre $f < 0$ se $x \in (0, 1)$.
Quando x si avvicina a 1 da sinistra, possiamo fare come prima la sostituzione $x = 1 - \delta$, con $\delta > 0$ molto piccolo (tendente a zero da destra). Quindi, possiamo scrivere $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) = -\delta(2 - \delta)$. Quindi,

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{1 - \delta}{-\delta(2 - \delta)} = -\frac{1}{2} \lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{\delta} = -\infty$$

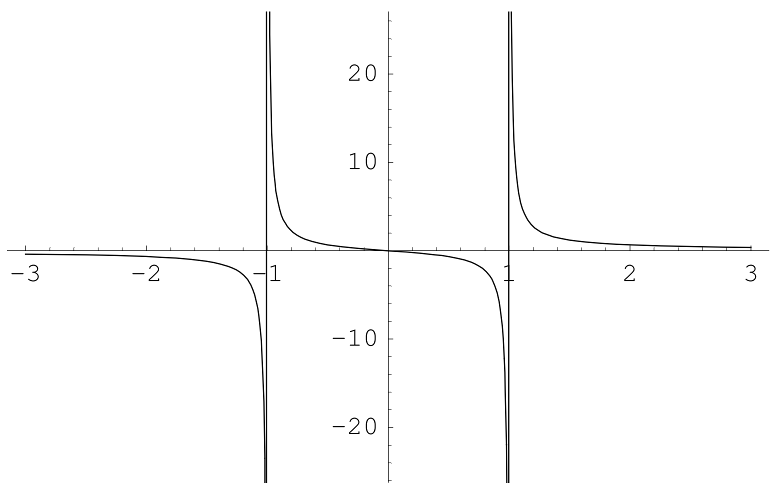
Quando x tende a 1 da destra, possiamo fare la sostituzione $x = 1 + \delta$, con $\delta > 0$ molto piccolo (tendente a zero da sinistra). Quindi $x^2 = 1 + 2\delta + \delta^2$, $x^2 - 1 = \delta(2 + \delta)$ e pertanto

$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1+\delta}{\delta(2+\delta)} = \frac{1}{2} \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{\delta} = +\infty.$

I limiti per $x \to -1^{\pm}$ si ottengono da quelli per $x \to -1^{\pm}$ per simmetria rispetto all'origine.

Di nuovo, non avendo ancora introdotto le derivate, non possiamo ancora trarre conclusioni sulla crescenza di f, a meno di fare qualche manipolazione algebrica. La figura seguente rappresenta comunque la parte del grafico della funzione sull'intervallo $[-3, 3]$.

ParametricPlot$\left[\left\{t, \frac{t}{t^2 - 1}\right\}, \{t, -3, 3\}\right]$



-Graphics-