ESERCIZI

1) Verificare che $\mathbf{R}^n$ é un $\mathbf{R}$-spazio vettoriale.
2) Verificare che $\mathbf{C}^n$ é un $\mathbf{R}$-spazio vettoriale e un $\mathbf{C}$-spazio vettoriale.
3) Dire se i seguenti insiemi sono $\mathbf{R}$-spazi vettoriali (se si' verificare gli assiomi, se no dire quali assiomi non sono soddisfatti):

$$\begin{array}{ll} a) & \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : f(0) = f(1)\}; \\ b) & \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : f(0) = f(1) + 1\}; \\ c) & \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : f'(0) = 2f(0)\}; \\ d) & \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : f \text{dispari}\}; \\ e) & \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : f \text{pari}\}. \end{array}$$

4) Dire se i seguenti insiemi sono sottospazi di $\mathbf{R}^3$:

$$\begin{array}{ll} a) & \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x = y\}; \\ b) & \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y + z = 0\}; \\ c) & \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y - z = 1\}. \end{array}$$

5) Verificare che l'insieme $\mathbf{C}[z]$ dei polimoni a coefficienti in $\mathbf{C}$ é uno spazio vettoriale su $\mathbf{C}$. L'insieme

$$\mathbf{C}_n[z] = \{p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n, a_i \in \mathbf{C}\}$$

dei polinomi di $\mathbf{C}[z]$ di grado $\leq n$ é un sottospazio di $\mathbf{C}[z]$?
L'insieme dei polinomi di grado uguale a n é un sottospazio di $\mathbf{C}[z]$?
6) Dimostrare che l'insieme $C([0, 1])$ delle funzioni continue $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ é un sottospazio dello spazio vettoriale delle funzioni reali definite su $[0, 1]$.
7) Descrivere il sottospazio di $\mathbf{R}^2$ generato da $\{(1, 3), (2, 1)\}$ e quello generato da $\{(1, 2), (-2, -4)\}$.
8) Descrivere il sottospazio di $\mathbf{R}[t]$ generato dai seguenti polinomi:

$$1 + t, (1 + t)^2, t^2, t^3 .$$

9) Trovare un insieme di generatori del sottospazio W di $\mathbf{R}^4$ cosí definito

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 : y = 2x, z + w = 0\} .$$

10) Dire se i seguenti vettori di $\mathbf{R}^4$ sono linearmente indipendenti:

$$\begin{array}{ll} a) & \{(1, 2, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (-3, 6, 0, 0)\}; \\ b) & \{(-1, 2, 1, 0), (2, 1, 1, 1)\}; \\ c) & \{(0, 2, 3, 4), (0, -2, 1, 1), (0, 1, 2, 0)\} . \end{array}$$

11) I vettori $\{(1, 3, 0), (0, 0, 2)\}$ generano $\mathbf{R}^3$? sono linearmente indipendenti?