

ESERCIZI

1) Siano V, W due spazi vettoriali su un campo K e sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Dimostrare i seguenti fatti:

a) se U é il sottospazio di V generato dai vettori $\{u_1, \dots, u_r\}$ allora la sua immagine $f(U)$ é il sottospazio di W generato da $\{f(u_1), \dots, f(u_r)\}$;

b) se V é generato dai vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$ allora l'immagine $L(V)$ é il sottospazio di W generato da $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$.

2) Siano V, W due spazi vettoriali su un campo K e sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Supponiamo che $\{v_1, \dots, v_n\}$ sia una base di V . Dimostrare i seguenti fatti:

a) f é iniettiva se e solo se i vettori $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ sono linearmente indipendenti in W ;

b) f é suriettiva se e solo se i vettori $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ generano W .

3) Siano V, W due spazi vettoriali su un campo K e sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Dimostrare i seguenti fatti:

a) se U é un sottospazio di V allora $f^{-1}(f(U)) = U + \text{Ker}(f)$;

b) se U' é un sottospazio di W allora $f(f^{-1}(U')) = U' \cap L(V)$.

4) Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una sua base. Definire un isomorfismo $g : V \rightarrow K^n$.

5) Si supponga che $V = U \oplus W$. Allora ogni elemento di V si scrive in modo unico come somma di un elemento di U e di un elemento di W . Si definisca l'applicazione $\pi : V \rightarrow U$ ponendo $\pi(v) = u$ se e solo se esiste un elemento $w \in W$ tale che $v = u + w$.

a) Provare che π é lineare e che $\pi(u) = u$ per ogni $u \in U$.

b) Provare che $\text{ker}(\pi) = W$ e che π é suriettiva.

c) Applicando il teorema fondamentale dell'omomorfismo a π provare che

$$\frac{U \oplus W}{W} \cong U.$$

6) Siano $V = \mathbf{R}_{\leq 4}[t]$ e $W = \{p(t) \in V \mid p(0) = 0, p'(1) = 0\}$. Dopo aver verificato che W é un sottospazio vettoriale di V rispondere alle seguenti domande:

a) É vero che $[1] = [0]$? É vero che $[-6t + 3t^2] = [0]$?

b) Qual é la dimensione di W ? qual é la dimensione di V/W ?

c) Trovare una base di W e una base di V/W .

7) Si considerino $V = \mathbf{R}^4$ e $W = \langle (1, 1, 0, 0), (1, 1, 2, 0), (0, 0, 1, 0) \rangle$. Rispondere alle seguenti domande:

a) Qual é la dimensione di W ? qual é la dimensione di V/W ?

b) Trovare una base di W e di V/W .

c) É vero che $[(1, 0, 0, 0)] = [(0, 0, 0, 0)]$? É vero che $[(1, 0, 0, 0)] = [(0, -1, 0, 0)]$?