ESERCIZI

1) Si scrivano le matrici associate alle seguenti applicazioni lineari rispetto alle basi canoniche:
a) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f((x, y)) = x$ per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$;
b) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ definita da $f((x, y, z)) = (5x + 5y, 3y + 3z, -z, -z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$;
c) $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ definita da $f(z) = iz$ per ogni $z \in \mathbf{C}$ (pensata come applicazione $\mathbf{R}$-lineare);
d) $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ definita da $f((z_1, z_2)) = (z_1 + iz_2, z_1 - iz_2)$ per ogni $(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2$ (pensata sia come applicazione $\mathbf{R}$-lineare sia come applicazione $\mathbf{C}$-lineare).
2) Si consideri l'applicazione $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ definita

$$f((x, y, z, w)) = (x - y - z - w, y - z - w, z - w)\,.$$

Si denotino con (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonica di $\mathbf{R}^4$ e con $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$.
a) Verificare che f é lineare.
b) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alle basi (e_1, e_2, e_3, e_4) e $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.
c) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alle basi $(e_1 + e_2 + e_3 + e_4, e_2 + e_3 + e_4, e_3 + e_4, e_4)$ e $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.
d) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alle basi (e_1, e_2, e_3, e_4) e $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varepsilon_3)$.
3) Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$.
a) Sia $B = \{e_1, e_1 + e_2, 2e_1 - e_2 - e_3\}$. Dimostrare che B é una base di $\mathbf{R}^3$.
b) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = e_1 + e_2, \quad f(e_3) = e_1 - 2e_2\,.$$

Si determini la matrice di f rispetto alla base B.
4) Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare $f((1, -1))$.
b) Calcolare $f((x, y))$ per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.
c) Dimostrare che $B = \{(1, -1), (2, 1)\}$ é una base di $\mathbf{R}^2$ e scrivere la matrice A' associata ad f rispetto alla base B di $\mathbf{R}^2$ e alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.
5) Sia $f : \mathbf{R}_{\leq 3}[t] \to \mathbf{R}_{\leq 3}[t]$ l'applicazione lineare la cui matrice rispetto alla

base $\{1, t, t^2, t^3\}$ é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Si determini $f(1), f(t^2), f(1 + t - 2t^2 + 3t^3)$.
b) Si determini $Ker(f)$ e si scriva una base per $Ker(f)$.
c) Si determini una base per l'immagine di f.
d) Si completi la base di $Ker(f)$ trovata in b) a una base di $R_{\leq 3}[t]$ e si scriva la matrice associata ad f rispetto a tale base.
6) Si consideri l'applicazione f definita nell'esercizio precedente e l'applicazione g :$\mathrm{R}_{\leq 3}[t] \to R_{\leq 2}[t]$ definita da $g(p) = p'$.
a) Scrivere la matrice associata a g rispetto alle basi $\{1, t, t^2, t^3\}$ e $\{1, t, t^2\}$.
b) Scrivere la matrice associata all'applicazione gf.
7) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

calcolare la matrice $C = AB$.
8) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcolare le matrici $C = AB$ e $D = BA$. Sono uguali?