ESERCIZI

1) Verificare che per ogni matrice $A \in M_n(K)$ valgono i fatti seguenti:
a) $(A^t)^t = A$;
b) le matrici $A + A^t$, AA^t, A^tA sono simmetriche;
c) l'applicazione $T : M_n(K) \to M_n(K)$ definita da $T(A) = A^t$ é un isomorfismo.
2) Una matrice quadrata $A \in M_n(K)$ si dice antisimmetrica se $A^t = -A$. L'insieme W delle matrici antisimmetriche é un sottospazio di $M_n(K)$? L'insieme V delle matrici simmetriche é un sottospazio di $M_n(K)$?
3) Provare che ogni matrice $A \in M_n(K)$ si puo' scrivere come somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica. (Suggerimento: $A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$)
4) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1 & 0 \\ -i & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ -i+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcolare la matrice $C = (A^tB)^t$.
5) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}), \quad B = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{C})$$

dire se sono invertibili e in caso affermativo calcolarne l'inversa.
6) Calcolare il rango delle matrici seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

7) Calcolare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & i & -1 \\ 2i & -2 & i & -1 \\ 3+i & -1+3i & i+1 & -1+i \\ 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix} \in M_4(\mathbf{C}).$$

8) Determinare nel campo complesso le soluzioni della seguente equazione:

$$ix^2 - (2+2i)x - 2i = 0\,.$$