
Tutoraggio di Algebra Lineare e Geometria

Esercizi di ripasso sulle applicazioni lineari

Esercizio 1. Sia $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare rappresentata, rispetto alle basi canoniche, dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare la matrice associata ad \mathcal{L} rispetto alle basi:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Soluzione. Costruiamo la matrice $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathcal{L})$ per colonne. Il metodo standard è quello di vedere come l'applicazione \mathcal{L} agisce sugli elementi della base \mathcal{B} e di scrivere ciascun vettore trasformato come combinazione lineare degli elementi della base \mathcal{B}' . I coefficienti di tali combinazioni costituiscono le colonne di $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathcal{L})$.

Cominciamo con la prima colonna. Lo scopo è quello di calcolare $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ per cui si abbia:

$$\mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$$

si ricava che la prima colonna di $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathcal{L})$ è $\begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix}$. Proseguendo in modo analogo per gli altri elementi di \mathcal{B} si ottiene:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathcal{L}) = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Sia $\mathcal{T} : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo :

$$\mathcal{T} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + 2y + z - 3s + 4t \\ 2x + 5y + 4z - 5s + 5t \\ x + 4y + 5z - 5s - 2t \end{pmatrix}.$$

Trovare la dimensione e una base rispettivamente di $\text{Im}(\mathcal{T})$ e $\text{Ker}(\mathcal{T})$.

Soluzione. Siano \mathcal{B} e \mathcal{B}' le basi canoniche rispettivamente di \mathbb{R}^5 e \mathbb{R}^3 . Costruiamo anzitutto la matrice associata a \mathcal{T} rispetto a tali basi. Per come è definita \mathcal{T} si ha che :

$$\mathcal{T} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{T} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Quindi :

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathcal{T}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & -5 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo che $\dim(\text{Im}(\mathcal{T})) = \text{rg}(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathcal{T}))$ e che una base per $\text{Im}(\mathcal{T})$ è costituita da un sottoinsieme massimale di vettori linearmente indipendenti di

$\text{span}\{\mathcal{T}(b_i)\}$ dove i b_i sono gli elementi di \mathcal{B} . Il metodo per calcolare tali quantità è quello di applicare l'Eliminazione di Gauss alla matrice trasposta di $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathcal{T})$. Svolgendo i calcoli, da $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathcal{T})'$ si ricava la seguente matrice a scala :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si vede immediatamente che $\dim(\text{Im}(\mathcal{T})) = \text{rg}(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathcal{T})) = \text{rg}(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathcal{T})') = 2$.

Come base per $\text{Im}(\mathcal{T})$ si può scegliere $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Una volta nota $\dim(\text{Im}(\mathcal{T}))$, per calcolare $\dim(\text{Ker}(\mathcal{T}))$ basta usare il teorema della dimensione: $\dim(\text{Ker}(\mathcal{T})) = 5 - \dim(\text{Im}(\mathcal{T})) = 3$.

Ricordando poi che $\text{Ker}(\mathcal{T}) = \{v \in \mathbb{R}^5 : \mathcal{T}(v) = 0\}$, ricaviamo che, per calcolare una base per $\text{Ker}(\mathcal{T})$, è sufficiente risolvere il sistema lineare omogeneo :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & -5 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Riducendo a scala la matrice $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathcal{T})$ otteniamo il sistema equivalente :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che ammette soluzioni del tipo : $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\gamma - 7\beta - 5\alpha \\ \alpha \\ \beta \\ 3\gamma - 2\beta - \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$.

Si ha quindi che :

$$\text{Ker}(\mathcal{T}) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

Come base per $\text{Ker}(\mathcal{T})$ possiamo prendere l'insieme :

$$\text{Ker}(\mathcal{T}) = \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esercizio 3. Sia $\mathcal{L} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo :

$$\mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z + t \\ x + 3y + 5z - 2t \\ 3x + 8y + 13z - 3t \end{pmatrix}.$$

Trovare la dimensione e una base rispettivamente di $\text{Im}(\mathcal{L})$ e $\text{Ker}(\mathcal{L})$.

Soluzione. Questo esercizio è analogo al precedente. Fissate le base canoniche \mathcal{B} e \mathcal{B}' rispettivamente di \mathbb{R}^4 e \mathbb{R}^3 , la matrice associata a \mathcal{L} rispetto a tali basi è :

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathcal{L}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 13 & -3 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare la dimensione e una base per $\text{Im}(\mathcal{L})$ procediamo come al solito. Applicando E-G a $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathcal{L})$ otteniamo la matrice a scala :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si vede immediatamente che $\dim(\text{Im}(\mathcal{L})) = \text{rg}(M_{B'}^B(\mathcal{L})) = \text{rg}(M_{B'}^B(\mathcal{L})') = 2$.

Come base di $\text{Im}(\mathcal{L})$ possiamo scegliere $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Applicando il teorema della dimensione otteniamo che $\dim(\text{Ker}(\mathcal{L})) = 4 - \dim(\text{Im}(\mathcal{L})) = 2$. Per individuare una base per $\text{Ker}(\mathcal{L})$ risolviamo il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 13 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Usando E-G otteniamo il sistema equivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che ammette come soluzioni tutti i vettori del tipo:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 7\beta \\ -2\alpha + 3\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si ha quindi che:

$$\text{Ker}(\mathcal{L}) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Come base per $\text{Ker}(\mathcal{L})$ possiamo prendere l'insieme :

$$\text{Ker}(\mathcal{L}) = \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -7 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right\}.$$

Esercizio 4. Sia $\mathcal{T} : \mathbb{R}_3[t] \rightarrow \mathbb{R}_2[t]$ l'applicazione lineare definita da :

$$\mathcal{T}(at^3 + bt^2 + ct + d) = a(1+t)^2 + bt + c + d.$$

- a) Determinare dimensioni e basi di $\text{Im}(\mathcal{T})$ e $\text{Ker}(\mathcal{T})$.
 b) Determinare la matrice associata a \mathcal{T} rispetto alle basi :

$$\mathcal{B}' = \{1, t+1, t^2+1, t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C}' = \{1, t+1, t^2+1\}.$$

Soluzione. a) Siano $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ e $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$ le basi canoniche rispettivamente di $\mathbb{R}_3[t]$ e $\mathbb{R}_2[t]$. Anzitutto costruiamo la matrice rappresentativa di \mathcal{T} rispetto a tali basi, $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathcal{T})$. Osserviamo che, per come è definita \mathcal{T} si ha che :

$$\mathcal{T}(1) = 1 \quad , \quad \mathcal{T}(t) = 1 \quad , \quad \mathcal{T}(t^2) = t \quad , \quad \mathcal{T}(t^3) = (1+t)^2 = 1 + 2t + t^2.$$

Come al solito costruiamo $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathcal{T})$ per colonne. La prima colonna conterrà le coordinate di $\mathcal{T}(1)$ rispetto agli elementi della base \mathcal{C} , la seconda le coordinate di $\mathcal{T}(t)$ e via di seguito. Complessivamente si ottiene :

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathcal{T}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per studiare le proprietà dell'applicazione \mathcal{T} è sufficiente studiare la matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathcal{T})$. In particolare si ha che: $\dim(\text{Im}(\mathcal{T})) = \text{rg}(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathcal{T})) = 3$ e, dal teorema sulla dimensione, $\dim(\text{Ker}(\mathcal{T})) = 4 - \dim(\text{Im}(\mathcal{T})) = 1$.

Per trovare una base per $\text{Im}(\mathcal{T})$ basta osservare che \mathcal{T} è un'applicazione suriettiva (la dimensione dell'immagine coincide con quella dello spazio di

arrivo). Questo significa che possiamo prendere come base di $\text{Im}(\mathcal{T})$ una qualsiasi base di $\mathbb{R}_2[t]$, ad esempio la base canonica \mathcal{C} .

Per trovare invece una base per $\text{Ker}(\mathcal{T})$ risolviamo il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esso ammette come soluzione tutti i vettori: $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

Per esprimere il risultato in termini di elementi di $\mathbb{R}_3[t]$ basta ricordare che il

vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ di \mathbb{R}^4 individua i coefficienti, rispetto alla base \mathcal{B} , del corrispondente polinomio in $\mathbb{R}_3[t]$.

Si ha quindi che $\text{ker}(\mathcal{T}) = \{\alpha(t-1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ ed è chiaro che $(t-1)$ è una base.

b) Per costruire la matrice associata a \mathcal{T} rispetto alle basi \mathcal{B}' e \mathcal{C}' osserviamo che:

$$\mathcal{T}(1) = 1 \quad \mathcal{T}(t+1) = 2 \quad \mathcal{T}(t^2+1) = t+1 \quad \mathcal{T}(t^3) = (1+t^2) + 2(t+1) - 2$$

Da ciò ricaviamo che:

$$M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(\mathcal{T}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Sia $V = \mathbb{R}_2[t]$, lo spazio dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata t di grado ≤ 2 . Sia $T : V \rightarrow V$, l'applicazione così definita :

$$T(a_0 + a_1t + a_2t^2) = a_0(1 + t) + a_1(1 + t^2) + a_2(2 + t + t^2).$$

- Verificare che T è lineare ;
- Sia $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$ la base canonica di V . Si scriva matrice rappresentativa di T rispetto alla base \mathcal{C} ;
- Si trovi $\text{Ker}(T)$;
- Sia $\mathcal{B} = \{1, 1 + t, 1 + t + t^2\}$ un'altra base di V . Si scriva la matrice rappresentativa di T rispetto alla base \mathcal{B} ;
- Si trovino le matrici che esprimono il cambiamento di base da \mathcal{C} a \mathcal{B} e viceversa .

Soluzione. a) Per verificare che T è lineare basta controllare che, dati due polinomi qualsiasi $f(t)$ e $g(t) \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, sono valide le seguenti relazioni : $T(f(t) + g(t)) = T(f(t)) + T(g(t))$ e $T(\lambda(f(t))) = \lambda T(f(t))$. La loro verifica è abbastanza immediata, basta svolgere i conti .

b) Osserviamo che, per come è definita T , si ha :

$$T(1) = 1 + t \quad T(t) = 1 + t^2 \quad T(t^2) = 2 + t + t^2.$$

Per cui la matrice rappresentativa di T rispetto alla base \mathcal{C} è :

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Come al solito, per trovare $\text{Ker}(T)$ risolviamo il sistema omogeneo :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Applicando l'Eliminazione di Gauss si trova che le soluzioni di tale sistema sono date dall'insieme : $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$. Dunque $\text{Ker}(T) = \{3\alpha - \alpha t + \alpha t^2, \alpha \in \mathbb{R}\}$.

d) Per scrivere la matrice rappresentativa di T rispetto alla base \mathcal{B} osserviamo che :

$$T(1) = 1 + t \quad T(1 + t) = 2 + t + t^2 \quad T(t^2) = 4 + 2t + 2t^2 .$$

Da questo segue che

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

e) Le colonne della matrice del cambio di base da \mathcal{C} a \mathcal{B} contengono i coefficienti delle combinazioni lineari che definiscono gli elementi della base \mathcal{B} in funzione di quelli di \mathcal{C} . Complessivamente si ottiene :

$$F_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

La matrice del cambio di base da \mathcal{B} a \mathcal{C} è la sua inversa :

$$F_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$