

## Insiemi e Funzioni

1. Si considerino gli insiemi  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e  $Y = \{3, 5, 4, 8, 9, 10\}$ . Quanti sono i sottoinsiemi di  $X \cap Y$ ?

(a) 7.

(b) 8.

(c) 6.

Risposta: b

**Soluzione.** Per definizione l'insieme  $X \cap Y$ , cioè l'intersezione degli insiemi  $X$  e  $Y$ , è l'insieme formato dagli elementi che appartengono tanto ad  $X$  che ad  $Y$ . Quindi  $X \cap Y = \{3, 4, 5\}$ . Pertanto possiamo elencare i sottoinsiemi di  $X \cap Y$ . Essi sono

$$\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{3, 4, 5\}.$$

Dunque in totale essi sono 8.

2. Sia  $X = \{1, 3, 5, 15\}$ . Quali delle seguenti affermazioni è vera?

(a)  $X = \{x \in \mathbb{Z} : x|15\}$ .

(b)  $X = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ è dispari}\} \cap \{x \in \mathbb{N} : x \leq 15\}$ .

(c)  $X = \{x \in \mathbb{N} : x|15\}$ .

Risposta: c

**Soluzione.** Ricordiamo innanzitutto che il simbolo “|” significa “divide”. Per stabilire quale sia la risposta giusta è necessario determinare gli elementi dei tre insiemi proposti. La risposta (a) propone l'insieme  $\{x \in \mathbb{Z} : x|15\}$  cioè l'insieme dei numeri *interi* che dividono 15. Questi sono  $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$ . Dunque

$$\{x \in \mathbb{Z} : x|15\} = \{1, -1, 3, -3, 5, -5, 15, -15\} \neq X.$$

La risposta (a) è sbagliata. La risposta (b) invece afferma che  $X$  coincide con l'insieme dei numeri naturali dispari che sono minori o uguali a 15. Questi numeri sono 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Pertanto

$$X \subseteq \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ è dispari}\} \cap \{x \in \mathbb{N} : x \leq 15\}$$

ma ci sono elementi del secondo insieme (i numeri 7, 9, 11, 13) che non appartengono ad  $X$ . Dunque anche questa risposta è sbagliata.

La risposta (c) invece è giusta perché  $X$  coincide con l'insieme di tutti i numeri *naturali* che sono divisori di 15.

3. Dati quattro insiemi  $A, B, C$  e  $D$ , si considerino i prodotti cartesiani  $A \times B$  e  $C \times D$ . Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(a) Qualunque siano gli insiemi  $A, B, C, D$  si ha

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

(b) Se  $A = 2\mathbb{Z}$ ,  $B = \mathbb{N}$ ,  $C = \mathbb{Z}$  e  $D = \mathbb{Z}$  allora

$$(A \times B) \cap (C \times D) \neq (A \cap C) \times (B \cap D).$$

(c) Se  $A \subseteq B$ , allora  $(A \times B) \cap (C \times D) = A \times (C \cap D)$

Risposta: a

**Soluzione.** Ricordiamo che il prodotto cartesiano  $A \times B$  è l'insieme delle coppie ordinate  $(x, y)$  tali che  $x \in A$  e  $y \in B$ . Pertanto una coppia  $(x, y)$  appartiene alla intersezione  $(A \times B) \cap (C \times D)$  se e soltanto se essa appartiene tanto ad  $A \times B$  che a  $C \times D$ , cioè se e soltanto se  $x$  appartiene sia ad  $A$  che a  $C$ , ed  $y$  appartiene sia a  $B$  che a  $D$ . Quindi  $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$  se e solo se  $x \in A \cap C$  e  $y \in B \cap D$ , cioè se e solo se  $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$ . Questo dimostra che (a) è la risposta giusta e che le altre sono sbagliate. Per esempio, applicando l'uguaglianza (a) che abbiamo appena dimostrato, si vede

$$(2\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = (2\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z}) \times (\mathbb{N} \cap \mathbb{Z})$$

dunque (b) è falsa.

4. Sia  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  la funzione  $f(x) = 2 \cdot x$ . Sia  $G \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  il grafico di  $f$ . Quale delle seguenti affermazioni è vera? (Si ricorda che il simbolo  $2\mathbb{Z}$  indica l'insieme dei numeri interi pari.)

(a)  $G \subseteq 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ .

(b)  $f(\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}$ .

(c) Per ogni  $x \in \mathbb{Z}$  esiste uno ed un solo  $y \in \mathbb{Z}$  tale che  $(y, x) \in G$ .

Risposta: b

**Soluzione.** (Ricordiamo che l'insieme  $f(\mathbb{Z})$  ossia l'immagine di  $\mathbb{Z}$  mediante la funzione  $f$  è l'insieme costituito da tutti i numeri della forma  $f(x)$ .) La prima risposta è falsa. Infatti poiché  $G$  è il grafico di una funzione, per qualunque numero  $a \in \mathbb{Z}$ , la coppia  $(a, f(a)) \in G$ . Questo anche se  $a$  è dispari. È dunque falso che  $G \subseteq 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ : per esempio  $(3, 6) \in G$ , ma  $(3, 6) \notin 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$  perché  $3 \notin 2\mathbb{Z}$ . La risposta (b) è quella giusta, perché l'immagine della funzione  $f$  è proprio l'insieme dei numeri pari. Infatti se  $y = 2 \cdot k$  è un numero pari, allora  $x = f(k)$ , dunque  $x \in f(\mathbb{Z})$ . Quindi  $2\mathbb{Z} \subseteq f(\mathbb{Z})$ . Viceversa, gli elementi dell'insieme  $f(\mathbb{Z})$  sono della forma  $f(a)$  per qualche  $a \in \mathbb{Z}$ . Ma  $f(a) = 2 \cdot a$ , dunque questi numeri sono tutti pari, cioè  $f(\mathbb{Z}) \subseteq 2\mathbb{Z}$ . Abbiamo provato la doppia inclusione, dunque  $f(\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z} = \{\text{numeri pari}\}$ . Infine (c) è sbagliata. Per convincersene è sufficiente considerare il numero  $x = 3 \in \mathbb{Z}$ : non possiamo trovare nessun numero  $y \in \mathbb{Z}$  tale che  $(y, 3) \in G$ . Infatti la coppia  $(y, 3)$  appartiene a  $G$  quando  $3 = f(y)$ , cioè quando  $3 = 2 \cdot y$ , ma questo è chiaramente impossibile se  $y$  è intero. L'affermazione fatta in (c) assomiglia molto alla condizione che  $G$  sia il grafico di una funzione, sono però scambiate  $x$  ed  $y$ . Pertanto l'affermazione risultante è completamente diversa, ed è falsa.

5. Sia  $C$  una corrispondenza fra l'insieme  $\mathbb{N}$  e l'insieme  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . (Si ricorda che una corrispondenza fra un insieme  $A$  ed un insieme  $B$  è per definizione un sottoinsieme di  $A \times B$ .) Quale delle seguenti affermazioni è vera?
- (a) Se  $C$  contiene almeno 5 elementi, allora  $C$  è il grafico di una funzione da  $\mathbb{N}$  a  $Y$ .
  - (b) Se  $C$  è il grafico di una funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow Y$ , allora  $C$  contiene infiniti elementi.
  - (c) Se  $C$  è il grafico di una funzione da  $\mathbb{N}$  a  $Y$ , allora esiste uno ed un solo  $x \in \mathbb{N}$  tale che  $(x, 5) \in C$ .

Risposta: b

**Soluzione.** La prima risposta afferma che se  $C$  contiene almeno 5 elementi, allora  $C$  è il grafico di una funzione. Per convincersi che è sbagliata, è sufficiente fare un esempio in cui l'insieme  $C$  contiene almeno 5 elementi, ma non è un grafico. Un tale esempio è dato da  $C = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$ . Questo contiene esatta-

mente cinque coppie, ma non è il grafico di nessuna funzione, perché al numero  $1 \in \mathbb{N}$  corrispondono 5 numeri in  $Y$ , mentre a tutti gli altri numeri naturali non corrisponde nessun numero di  $Y$ . La seconda risposta invece è quella giusta: se  $C$  è il grafico della funzione  $f$ , dato  $n \in \mathbb{N}$  la coppia  $(n, f(n)) \in C$ . Dunque tutte le coppie  $(1, f(1)), (2, f(2)), (3, f(3)), (4, f(4)), \dots, (n, f(n)), \dots$  appartengono all'insieme  $C$ . Queste coppie sono tutte distinte fra loro e sono infinite, quindi l'insieme  $C$  è infinito. La risposta (c) è falsa. Essa afferma che se  $C$  è il grafico di una funzione, allora esiste un solo numero  $x \in \mathbb{N}$  tale che  $f(x) = 5$ . Anche in questo caso possiamo facilmente costruire esempi di grafici  $C$  che non soddisfano questa proprietà: basta considerare la funzione *costante* definita dalla formula  $f(n) = 5$ , cioè la legge che associa ad ogni numero naturale il numero 5. Questa legge è una funzione, tuttavia, se  $C$  indica il grafico di  $f$ , esistono infiniti  $x$  tali che  $(x, 5) \in C$ .

6. Siano  $A$  l'insieme formato dai numeri interi multipli di 3 e  $B$  l'insieme dei numeri interi che sono divisori di 18. Quale dei seguenti sottoinsiemi di  $A \times B$  è il grafico di una funzione da  $A$  a  $B$ ?

(a)  $C_1 = \{(x, y) \in A \times B : y^2 = 36\}$ .

(b)  $C_2 = \{(x, y) \in A \times B : xy = 0\}$ .

(c)  $C_3 = \{(x, y) \in A \times B : y = -6\}$ .

Risposta: c

**Soluzione.** Elenchiamo innanzitutto gli elementi dell'insieme  $B$ :

$$B = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, 9, -9, 18, -18\}.$$

Poiché  $y^2 = 36$  se e solo se  $y = 6$  oppure  $y = -6$ , il primo insieme lo possiamo scrivere come  $C_1 = (A \times \{6\}) \cup (A \times \{-6\})$ . Dunque per ogni  $x \in \mathbb{N}$ , le due coppie  $(x, 6)$  e  $(x, -6)$  appartengono entrambe a  $C_1$ . Di conseguenza  $C_1$  non può essere il grafico di una funzione e (a) è sbagliata.

L'insieme definito in (b) è dato dalle coppie  $(x, y)$  tali che  $xy = 0$ . Tutti gli elementi di  $B$  sono non nulli, dunque se  $(x, y) \in A \times B$ ,  $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ . Quindi  $C_2 = \{(x, y) \in A \times B : x = 0\} = \{0\} \times B$ . Questo non è il grafico di una funzione perché all'elemento  $0 \in A$  corrispondo più di un elemento, mentre agli altri elementi di  $A$  non corrisponde nessun elemento di  $Y$ . La risposta (c) è quella giusta, infatti  $C_3$  è il grafico della funzione costante  $f(x) = 6$ .