Cognome: ____________________ Matricola: ____________________

Nome: ____

Esame di Matematica Discreta (Elementi) 21 febbraio 2005
Si consegni questo foglio compilato assieme allo svolgimento

Indicare la risposta corretta con una crocetta.

1. Sia $G = (V, L)$ un grafo con tutti i vertici dispari ed $n = |V|$. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

   a) $|L| < \frac{n(n-1)}{2}$,

   b) $n = 3$;

   c) n è pari.

2. Siano $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Supponiamo che $M.C.D.(a, b) = 7$ e $M.C.D.(a, c) = 77$. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera:

   a) $M.C.D.(b, c) = 7$;

   b) $M.C.D.(ab, c) = 77$;

   c) $M.C.D.(b, 11) = 1$.

3. Quale è l'insieme degli interi $n > 1$ per cui la classe $[16]_n$ è invertibile in $\mathbb{Z}_n$?

   a) L'insieme dei numeri minori di 16;

   b) L'insieme dei numeri dispari;

   c) L'insieme dei numeri che non sono divisibili per 16.

4. Sia $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$. Fissato $a \in \mathbb{N}^*$, si consideri l'equazione, nell'incognita $x \in \mathbb{N}^*$,
$$[8a]_{125}^x = [-249]_{125}$$
   dove $[\cdot]_{125}$ denota la classe di resto modulo 125. Allora:

   a) Per ogni $a = 11^m$, $m \in \mathbb{N}$, l'equazione ha una soluzione $x \in \mathbb{N}^*$.

   b) Non esiste alcuna scelta di a per la quale l'equazione abbia una soluzione $x \in \mathbb{N}^*$.

   c) L'equazione ammette soluzione solo se a è un multiplo di 11.

5. Sia $L = \mathcal{P}(1, 2, 3, 4)$ e si consideri su L la relazione d'ordine data dall'inclusione.

   a) $(L, \subseteq)$ è un reticolo complementato;

   b) $(L \setminus \{\}, \subseteq)$ è un reticolo;

c) $(L, \subseteq)$ è un insieme totalmente ordinato.

6. Siano dati $n+1$ insiemi $X_0, X_1, ..., X_n$ ed n applicazioni $f_1 : X_0 \to X_1$, $f_2 : X_1 \to X_2$, ..., $f_n : X_{n-1} \to X_n$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   a) Se $f_n \circ ... \circ f_1$ è iniettiva, allora f_n è iniettiva;

   b) se $f_n \circ ... \circ f_1$ è iniettiva, allora f_1 è iniettiva;

   c) Se $f_n \circ ... \circ f_1$ è suriettiva, allora $f_{n-1} \circ ... \circ f_1$ è suriettiva.

7. Si consideri l'insieme $X = \{a, b, c, d, e\}$ e la relazione

$$\mathcal{R} = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (a,d), \\ (d,c), (a,c), (c,a), (d,a), (c,d)\}.$$

   Allora

   a) R è una relazione di equivalenza, ma non è una relazione d'ordine;

   b) R è una relazione d'ordine, ma non è una relazione di equivalenza;

   c) R non è né una relazione di equivalenza, né una relazione d'ordine.

Si svolgano i seguenti esercizi, dando una piena giustificazione.

8. Determinare tutti i possibili grafi $G = (V, L)$ con le seguenti proprietà:

   (a) $n = |V| \geq 7$;

   (b) la permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & ... & n & 1 \end{pmatrix}.$$

   è un automorfismo del grafo G, cioè un isomorfismo di G in sé;

   (c) $|L| \leq 14$.

   (d) G è privo di vertici isolati.

9. Sia $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 7$ e si ponga $X_m = \{1, ..., m\}$. Per quali m i sottoinsiemi di X_m contenenti 5 elementi sono più di quelli contenenti 7 elementi? Sia poi m un numero con questa proprietà, e tale che $[m]_{210} \in \mathbb{Z}_{210}$ sia invertibile. Si determini m. Posto $Y_m = \{$sottoinsiemi di X_m contenenti 5 elementi$\}$ e $Z_m = \{$sottoinsiemi di X_m contenenti 7 elementi$\}$ si calcoli il numero delle applicazioni iniettive di Z_m in Y_m.