Si svolga il seguente esercizio, dando una piena giustificazione

8. Sia $P(n)$ il predicato (o funzione proposizionale):

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Si dimostri, per induzione, che $\forall n \geq 1, P(n)$.

Svolgimento

- Si prova che $P(1)$ è vera:

$$1^2 = \frac{1(2)(3)}{6} = 1$$

- Sia $n \geq 1$, e si supponga vera $P(n)$ per ipotesi di induzione. Vogliamo provare che è vera $P(n+1)$, cioè

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}.$$

  Infatti, $1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$ per ipotesi di induzione, e facendo i conti si ottiene: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6((n+1)^2)}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)((2n^2+n)+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6))}{6} =$. Poiché vale

$$\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

  si ha la tesi dell'esercizio.