Esercizi

Esercizio 1.

1. Si dia la definizione di base di uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$.
2. Si supponga che V ammetta una base finita $\mathcal{B}$. Si dimostri che allora qualsiasi altra base di V ha la stessa cardialità di $\mathcal{B}$.
3. Definire la dimensione di V.
4. Sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale (definire). Che relazione c'è tra $\dim(W)$ e $\dim(V)$? Si dimostri tale relazione e inoltre che $\dim(W) = \dim(V)$ se e solo se ...

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale finito-dimensionale sul campo $\mathbb{K}$ e siano $v_1, \ldots, v_\mathrm{d} \in V$. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $(v_1, \ldots, v_\mathrm{d})$ è un sistema massimale di vettori linearmente indipendenti.
2. $(v_1, \ldots, v_\mathrm{d})$ è un sistema minimale di generatori di V.
3. $(v_1, \ldots, v_\mathrm{d})$ è una base di V.
4. $\forall\, v \in V$, esistono e sono unici $x_1, \ldots, x_\mathrm{d} \in \mathbb{K}$ tali che $v = \sum_{i=1}^{\mathrm{d}} x_i v_i$.

(*Sugg.: dimostrare innanzitutto l'equivalenza di 1) e 2).*)

Esercizio 3.

1. Si dia la definizione di norma di un vettore in $\mathbb{R}^n$;
2. si dimostri la diseguaglianza triangolare;
3. si dia la definizione di base ortogonale;
4. si dia la definizione di angolo tra due vettori in $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale sul campo K;

1. si dia la definizione di vettori linearmente indipendenti e di base di V .
2. Si dimostri che due basi qualsiasi di V hanno la stessa cardinalit'a (si supponga che siano finite); si dia la definizione di dimensione di uno spazio vettoriale V .

3. Si dimostri che se $r > dim(V)$, allora r vettori in V sono necessariamente linearmente dipendenti.

4. Sia $U \subseteq V$ un sottospazio vettoriale; si dimostri che $dim(U) \leq dim(V)$ e che vale luguaglianza se e solo se $U = V$.

Esercizio 5. Si dia la definizione di sottospazio vettoriale di V. Si stabilisca con dimostrazione quali dei seguenti sono sottospazi vettoriali:

1. $R =: \left\{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\right\} \subseteq V =: \mathbb{K}^2$;

2. Se A è una matrice 3×2 a entrate in $\mathbb{K}$,
$$R =: \left\{(X, AX) : X \in \mathbb{K}^2\right\} \subseteq V =: \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^3.$$

Esercizio 6. Se $R, S \subseteq V$ sono sottospazi vettoriali, definire lo spazio somma $R+S$ dimostrando che è anch'esso un sottospazio vettoriale di V. Enunciare un teorema che esprime la dimensione di $R+S$ in termini di ... Dimostrarlo.

Esercizio 7.

1. Si determinio equazioni Cartesiane e rappresentazione parametrica per la retta $\ell \subseteq \mathbb{R}^3$ congiungente i punti $P = (1, 2, 3)^t$ e $Q = (-1, 1, -1)^t$. È un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$? Motivare.

2. Si determinio equazioni Cartesiane e rappresentazione parametrica per il piano $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ contenente i punti $A = (1, 1, 2)^t$, $B = (-3, 1, 2)^t$, $C = (1, 0, 1)^t$. È un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$? Motivare.

3. Si determinio equazioni Cartesiane e rappresentazione parametrica per la retta $\mathfrak{s}$ perpendicolare al piano Π e passante per A (notazione come sopra). È un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$? Motivare.

4. Si determini se le rette ℓ e $\mathfrak{s}$ sono parallele, incidenti, sghembe, perpendicolari, e se ne trovi la distanza.

Esercizio 8. Sia
$$V =: \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{K}^4.$$

1. Determinare dimensione, equazioni Cartesiane e una base per V.

2. Se $U \subseteq \mathbb{K}^4$ è lo span dei primi tre vettori della base standard, determinare basi e dimensioni per $U+V$ e $U \cap V$.

3. Determinare una base di $\mathbb{K}^4$ che estende una base di V. Determinare una base di V che estende una base di $V \cap U$.

Esercizio 9. Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia $V \subseteq \mathbb{K}^5$ il sottospazio vettoriale

$$U =: \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} : x - y + u = 2x - z - u = 3x - y - z = 0 \right\}.$$

1. Trovare dimensione e una base per U.

2. Trovare equazioni Cartesiane per U

3. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, trovare una base di U ortonormale per il prodotto scalare standard.

4. Se
$$W =: \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} : x - y + z - t + u = 0 \right\},$$
determinare dimensione e basi di $U \cap W$ e $U + W$.

5. Determinare esplicitamente una applicazione lineare suriettiva $\alpha : \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}^{\mathrm{boh}}$ tale che $V = \ker(\alpha)$, specificando 'boh'.

6. Determinare esplicitamente un'applicazione lineare iniettiva $\beta : \mathbb{K}^{\mathrm{mah}} \to \mathbb{K}^5$ tale che $V = \mathrm{im}(\beta)$ (spazio immagine), specificando 'mah'.